

Hướng dẫn giải giải ĐỀ SỐ 1

Câu I: 2) Gọi $M(m; 2) \in d$. Phương trình đường thẳng Δ qua M có dạng: $y = k(x - m) + 2$.

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2 = k(x - m) + 2 & (1) \\ -3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > 3 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Câu II: 1) Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 0$. (2) $\Leftrightarrow x = 3$

$$2) \quad 2) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[4(\cos x - \sin x) - \sin 2x - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x = k2\pi; \quad x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

Câu III: $(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{33}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{3}{64}\cos 8x \Rightarrow I = \frac{33}{128}\pi$

Câu IV: Đặt $V_1 = V_{S.AMN}$; $V_2 = V_{A..BCNM}$; $V = V_{S.ABC}$; $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{1}{2}$ (1)

$$AM = \frac{2}{\sqrt{5}}a; \quad SM = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{3}{5} \Rightarrow V_2 = \frac{3}{5}V \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{5}$$

Câu V: $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ (1); $b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$ (2); $c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$ (3)

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + abcd \geq abc(a + b + c + d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^4 + b^4 + c^4 + abcd} \leq \frac{1}{abc(a + b + c + d)} \quad (4) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu VI.a: 1) $A(3; 1)$, $B(5; 5) \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

2) Gọi $I(a; 0; 0)$, $J(0; b; 0)$, $K(0; 0; c) \Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\begin{aligned} \overline{IA} &= (4 - a; 5; 6), & \overline{JA} &= (4; 5 - b; 6) \\ \overline{JK} &= (0; -b; c), & \overline{IK} &= (-a; 0; c) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{5}{b} + \frac{6}{c} = 1 \\ -5b + 6c = 0 \\ -4a + 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{77}{4} \\ b = \frac{77}{5} \\ c = \frac{77}{6} \end{cases}$$

Câu VII.a: $a + bi = (c + di)^n \Rightarrow |a + bi| = |(c + di)^n|$

$$\Rightarrow |a + bi|^2 = |(c + di)^n|^2 = |(c + di)|^{2n} \Rightarrow a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^n$$

Câu VI.b: 1) Tìm được $C_1(I; -1)$, $C_2(-2; -10)$.

+ Với $C_1(I; -1) \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - \frac{11}{3}x + \frac{11}{3}y + \frac{16}{3} = 0$

+ Với $C_2(-2; -10) \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - \frac{91}{3}x + \frac{91}{3}y + \frac{416}{3} = 0$

2) Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và $(P) \perp (Oxy) \Rightarrow (P): 5x - 4y = 0$

(Q) là mặt phẳng qua CD và $(Q) \perp (Oxy) \Rightarrow (Q): 2x + 3y - 6 = 0$

Ta có $(D) = (P) \cap (Q) \Rightarrow$ Phương trình của (D)

Câu VII.b: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$ với $\alpha > 0$ tùy ý và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 2

Câu I: 2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành: $x^3 - 3mx^2 + 9x - 7 = 0$ (1)

Gọi hoành độ các giao điểm lần lượt là $x_1; x_2; x_3$. Ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$

Để $x_1; x_2; x_3$ lập thành cấp số cộng thì $x_2 = m$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\Rightarrow -2m^3 + 9m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{cases} \text{ Thử lại ta được: } m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}$$

Câu II: 1) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x \Leftrightarrow \cos x (\cos 7x - \cos 11x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{9} \end{cases}$

2) $0 < x \leq 1$

Câu III: $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{5-x^2}}{x-1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$

Câu IV: $V_{ANIB} = \frac{\sqrt{2}}{36}$

Câu V: Thay $x = F - 3y$ vào bpt ta được: $50y^2 - 30Fy + 5F^2 - 5F + 8 \leq 0$

Vì bpt luôn tồn tại y nên $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow -25F^2 + 250F - 400 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq F \leq 8$

Vậy GTLN của $F = x + 3y$ là 8.

Câu VI.a: 1) $AF_1 + AF_2 = 2a$ và $BF_1 + BF_2 = 2a \Rightarrow AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 4a = 20$

Mà $AF_1 + BF_2 = 8 \Rightarrow AF_2 + BF_1 = 12$

2) $B(4; 2; -2)$

Câu VII.a: $x = 2; x = 1 - \sqrt{33}$

Câu VI.b: 1) Phương trình đường tròn có dạng: $\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2 & (a) \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 & (b) \end{cases}$

a) $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5 \end{cases}$ b) $\Rightarrow$ vô nghiệm.

Kết luận: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ và $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

2) $\vec{u} = [\vec{u_d}; \vec{n_p}] = (2; 5; -3)$. Δ nhận $\vec{u}$ làm VTCP $\Rightarrow \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

Câu VII.b: Toạ độ các điểm cực trị lần lượt là: $A(m; 3m^2 + 1)$ và $B(-3m; -5m^2 + 1)$

Vì $y_1 = 3m^2 + 1 > 0$ nên để một cực trị của (C_m) thuộc góc phần tư thứ I, một cực trị của (C_m)

thuộc góc phần tư thứ III của hệ toạ độ Oxy thì $\begin{cases} m > 0 \\ -3m < 0 \\ -5m^2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 3

Câu I: 2) Giả sử $A(a; a^3 - 3a^2 + 1)$, $B(b; b^3 - 3b^2 + 1)$ ($a \neq b$)

Vì tiếp tuyến của (C) tại A và B song song suy ra $y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0$
 $\Leftrightarrow a+b-2=0 \Leftrightarrow b=2-a \Rightarrow a \neq 1$ (vì $a \neq b$).

$$AB^2 = (b-a)^2 + (b^3 - 3b^2 + 1 - a^3 + 3a^2 - 1)^2 = 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2$$

$$AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \Rightarrow b=-1 \\ a=-1 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(3; 1)$ và $B(-1; -3)$

Câu II: 1) $(1) \Leftrightarrow (x+3)|x-1|=4x \Leftrightarrow x=3; x=-3+2\sqrt{3}$

$$2) (2) \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) & (a) \\ x = \frac{5\pi}{6} + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}) & (b) \end{cases}$$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{5\pi}{18}$.

Câu III: Đặt $x = -t \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$

$$\Rightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \Rightarrow I = \frac{3\pi}{16}.$$

Câu IV: $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AK}] \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27}$

Câu V: Sử dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$\frac{a}{1+b^2c} = a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} \geq a - \frac{ab(1+c)}{4} = a - \frac{ab}{4} - \frac{abc}{4} \quad (1)$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 1$

$$\frac{b}{1+c^2d} = b - \frac{bc^2d}{1+c^2d} \geq b - \frac{bc^2d}{2c\sqrt{d}} = b - \frac{bc\sqrt{d}}{2} \geq b - \frac{bc(1+d)}{4} = b - \frac{bc}{4} - \frac{bcd}{4} \quad (2)$$

$$\frac{c}{1+d^2a} = c - \frac{cd^2a}{1+d^2a} \geq c - \frac{cd^2a}{2d\sqrt{a}} = c - \frac{cd\sqrt{a}}{2} \geq c - \frac{cd(1+a)}{4} = c - \frac{cd}{4} - \frac{cda}{4} \quad (3)$$

$$\frac{d}{1+a^2b} = d - \frac{da^2b}{1+a^2b} \geq d - \frac{da^2b}{2a\sqrt{b}} = d - \frac{da\sqrt{b}}{2} \geq d - \frac{da(1+b)}{4} = d - \frac{da}{4} - \frac{dab}{4} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 4 - \frac{ab+bc+cd+da}{4} - \frac{abc+bcd+cda+dab}{4}$$

Mặt khác:

$$\bullet \quad ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2 = 4. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a+c = b+d$$

$$\bullet abc + bcd + cda + dab = ab(c+d) + cd(b+a) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d) + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2(b+a)$$

$$\Leftrightarrow abc + bcd + cda + dab \leq (a+b)(c+d) \left(\frac{a+b}{4} + \frac{c+d}{4}\right) = (a+b)(c+d)$$

$$\Leftrightarrow abc + bcd + cda + dab \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 4. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = d = 1.$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 4 - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2 \Rightarrow \text{dpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Câu VI.a: 1) Pths của d: $\begin{cases} x=t \\ y=-4+3t \end{cases}$. Giả sử $C(t; -4+3t) \in d$.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4t^2 + 4t + 1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(-2; -10)$ hoặc $C(1; -1)$.

2) (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) $\Rightarrow$ (Q) có VTPT $\vec{n} = [\vec{n}_p, \vec{AB}] = (0; -8; -12) \neq \vec{0}$

$$\Rightarrow (Q): 2y + 3z - 11 = 0$$

Câu VII.a: Vì $z = 1 + i$ là một nghiệm của phương trình: $z^2 + bz + c = 0$ nên:

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (2+b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Câu VI.b: 1) A(-4, 2), B(-3, -2), C(1, 0)

2) Phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song d: (α): $6x + 3y + 2z - 12 = 0$

Phương trình mặt phẳng (β) chứa OC và song song d: (β): $3x - 3y + z = 0$

$$\Delta \text{ là giao tuyến của } (\alpha) \text{ và } (\beta) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Câu VII.b: } z^4 - z^3 + 6z^2 - 8z - 16 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2)(z^2+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ z=2 \\ z=2\sqrt{2}i \\ z=-2\sqrt{2}i \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 4

$$\text{Câu I: 2) } |x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m \text{ có 6 nghiệm } \Leftrightarrow \log_{12} m = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = 12^{\frac{9}{4}} = 144^{\frac{3}{4}} \sqrt{12}$$

$$\text{Câu II: 1) (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos^2 2x - \cos x \cos 2x = 2 \cos 2x \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$2) \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}. (2) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1} \quad (1 \leq t \leq 2), \text{ do } x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$$

Khảo sát $g(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ với $1 \leq t \leq 2$. $g'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0$. Vậy g tăng trên $[1, 2]$

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ bpt $m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ có nghiệm $t \in [1, 2] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [1; 2]} g(t) = g(2) = \frac{2}{3}$

Câu III: Đặt $t = \sqrt{2x + 1}$. $I = \int_1^3 \frac{t^2}{1 + t} dt = 2 + \ln 2$.

Câu IV: $V_{AA_1BM} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AA_1} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]| = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}$; $S_{\Delta BMA_1} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA_1}]| = 3a^2 \sqrt{3}$
 $\Rightarrow d = \frac{3V}{S} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu V: Áp dụng BĐT Cô-si: $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}$; $\frac{3}{2}(y + z) \geq 3\sqrt{xy}$; $\frac{5}{2}(z + x) \geq 5\sqrt{xy} \Rightarrow$ đpcm

Câu VI.a: 1) $B, C \in (Oxy)$. Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; \sqrt{3}; 0)$.

$$\widehat{MIO} = 45^\circ \Rightarrow \alpha = \widehat{NIO} = 45^\circ.$$

$$2) V_{BCM N} = V_{MOBC} + V_{NOBC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(a + \frac{3}{a} \right) \text{ đạt nhỏ nhất } \Leftrightarrow a = \frac{3}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}.$$

Câu VII.a: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số $\Rightarrow x = y = 0$.

Câu VI.b: 1) $2x + 5y + z - 11 = 0$

2) A, B nằm cùng phía đối với (P) . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua $(P) \Rightarrow A'(3; 1; 0)$

Để $M \in (P)$ có $MA + MB$ nhỏ nhất thì M là giao điểm của (P) với $A'B \Rightarrow M(2; 2; -3)$.

$$\text{Câu VII.b: } (\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 5

Câu I: 2) Gọi $M \left(x_0; 2 + \frac{3}{x_0 - 1} \right) \in (C)$.

Tiếp tuyến d tại M có dạng: $y = \frac{-3}{(x_0 - 1)^2} (x - x_0) + 2 + \frac{3}{x_0 - 1}$

Các giao điểm của d với 2 tiệm cận: $A \left(1; 2 + \frac{6}{x_0 - 1} \right)$, $B(2x_0 - 1; 2)$.

$S_{\Delta IAB} = 6$ (không đổi) $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi $IA = IB$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{|x_0 - 1|} = 2|x_0 - 1| \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow M_1(1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}); M_2(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$$

Câu II: 1) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - \cos x) \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \\ \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$$2) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 - 2 + 4)(y - 3 + 3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases} \cdot \text{Đặt } \begin{cases} x^2 - 2 = u \\ y - 3 = v \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u.v + 4(u+v) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$$

Câu III: Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{1}{2} e$

Câu IV: $V = \frac{4}{3} a^3 \cdot \frac{\tan \alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}$. Ta có $\frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3} = \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \leq \frac{1}{27}$

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{4a^3 \sqrt{3}}{27} \text{ khi đó } \tan^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Câu V: Với $x, y, z > 0$ ta có $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$
 Tương tự ta có: $4(y^3 + z^3) \geq (y + z)^3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = z$
 $4(z^3 + x^3) \geq (z + x)^3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = x$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} \geq 2(x + y + z) \geq 6\sqrt[3]{xyz}$$

Ta lại có $2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right) \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Vậy $P \geq 6\left(\sqrt[3]{xyz} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \geq 12$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\min P = 12$ khi $x = y = z = 1$.

Câu VI.a: 1) A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)
 2) Chứng tỏ $(d_1) \parallel (d_2)$. (P): $x + y - 5z + 10 = 0$

Câu VII.a: Nhận xét: $10x^2 + 8x + 4 = 2(2x+1)^2 + 2(x^2 + 1)$

$$(3) \Leftrightarrow 2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 - m\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2 = 0. \text{ Đặt } \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = t \text{ Điều kiện: } -2 < t \leq \sqrt{5}.$$

Rút m ta có: $m = \frac{2t^2 + 2}{t}$. Lập bảng biên thiên $\Rightarrow 4 < m \leq \frac{12}{\sqrt{5}}$ hoặc $-5 < m < -4$

Câu VI.b: 1) Giả sử đường thẳng AB qua M và có VTPT là $\vec{n} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)
 $\Rightarrow$ VTPT của BC là: $\vec{n}_1 = (-b; a)$.

Phương trình AB có dạng: $a(x-2) + b(y-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a - b = 0$
 BC có dạng: $-b(x-4) + a(y+2) = 0 \Leftrightarrow -bx + ay + 4b + 2a = 0$

Do ABCD là hình vuông nên $d(P; AB) = d(Q; BC) \Leftrightarrow \frac{|-b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3b + 4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b = -a \end{cases}$

• $b = -2a$: AB: $x - 2y = 0$; CD: $x - 2y - 2 = 0$; BC: $2x + y - 6 = 0$; AD: $2x + y - 4 = 0$

• $b = -a$: AB: $-x + y + 1 = 0$; BC: $-x - y + 2 = 0$; AD: $-x - y + 3 = 0$; CD: $-x + y + 2 = 0$

2) $\begin{cases} 2x - y + 10z - 47 = 0 \\ x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$

Câu VII.b: (4) $\Leftrightarrow (|mx+1|)^3 + |mx+1| = (x-1)^3 + (x-1)$.

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t$, hàm số này đồng biến trên R.

$f(|mx+1|) = f(x-1) \Leftrightarrow |mx+1| = x-1$

Giải và biện luận phương trình trên ta có kết quả cần tìm.

• $-1 < m < 1$ phương trình có nghiệm $x = \frac{-2}{m-1}$

- $m = -1$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 1$
- Các trường hợp còn lại phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 6

Câu I: 2) $M(-1;2)$. (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}; m \neq 0$

$$\text{Tiếp tuyến tại } N, P \text{ vuông góc} \Leftrightarrow y'(x_N) \cdot y'(x_P) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu II: 1) Đặt $t = 3^x > 0$. (1) $\Leftrightarrow 5t^2 - 7t + 3|3t - 1| = 0 \Rightarrow x = \log_3 \frac{3}{5}; x = -\log_3 5$

$$2) \begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (a) \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) - m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 & (b) \end{cases}$$

• Giải (a) $\Leftrightarrow 1 < x < 3$.

• Xét (b): Đặt $t = \log_2(x^2 - 2x + 5)$. Từ $x \in (1; 3) \Rightarrow t \in (2; 3)$.

$$(b) \Leftrightarrow t^2 - 5t = m. \text{ Xét hàm } f(t) = t^2 - 5t, \text{ từ BBT} \Rightarrow m \in \left(-\frac{25}{4}; -6\right)$$

Câu III: Cộng (a), (b), (c) ta được: $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$ (d)

• Nếu $x > 3$ thì từ (b) có: $y^3 = 9x(x-3) + 27 > 27 \Rightarrow y > 3$

từ (c) lại có: $z^3 = 9y(y-3) + 27 > 27 \Rightarrow z > 3 \Rightarrow$ (d) không thỏa mãn

• Tương tự, nếu $x < 3$ thì từ (a) $\Rightarrow 0 < z < 3 \Rightarrow 0 < y < 3 \Rightarrow$ (d) không thỏa mãn

• Nếu $x = 3$ thì từ (b) $\Rightarrow y = 3$; thay vào (c) $\Rightarrow z = 3$. Vậy: $x = y = z = 3$

Câu IV: I là trung điểm AD, $HL \perp SI \Rightarrow HL \perp (SAD) \Rightarrow HL = d(H; (SAD))$

$MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel (SAD), SK \subset (SAD)$

$$\Rightarrow d(MN, SK) = d(MN, (SAD)) = d(H, (SAD)) = HL = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu V: $T = \frac{1-(1-a)}{\sqrt{1-a}} + \frac{1-(1-b)}{\sqrt{1-b}} + \frac{1-(1-c)}{\sqrt{1-c}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{1}{\sqrt{1-c}}\right) - (\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c})$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{1}{\sqrt{1-c}} \geq \frac{9}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}}; 0 < \sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} < \sqrt{6} \text{ (Bunhia)}$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{9}{\sqrt{6}} - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}. \min T = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu VI.a: 1) $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right); C_1(0;1); C_2\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$

2) (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$. (Q) chứa $Ox \Rightarrow (Q): ay + bz = 0$.

Mặt khác đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (Q) đi qua tâm I.

Suy ra: $-2a - b = 0 \Leftrightarrow b = -2a \text{ (} a \neq 0 \text{)} \Rightarrow (Q): y - 2z = 0$.

Câu VII.a: Cân bằng hệ số ta được $a = 2, b = -2, c = 4$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 2i; z = 1 + \sqrt{3}i; z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = 2.$$

Câu VI.b: 1) (C) có tâm $I(3;0)$ và bán kính $R = 2$. Gọi $M(0; m) \in Oy$

$$\text{Qua } M \text{ kẻ hai tiếp tuyến } MA \text{ và } MB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AMB} = 60^\circ & (1) \\ \widehat{AMB} = 120^\circ & (2) \end{cases}$$

Vì MI là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 30^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow MI = 2R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$$

$$(2) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 60^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow MI = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ Vô nghiệm. Vậy có hai điểm}$$

$$M_1(0; \sqrt{7}) \text{ và } M_2(0; -\sqrt{7})$$

2) Gọi MN là đường vuông góc chung của (d_1) và $(d_2) \Rightarrow M(2; 1; 4); N(2; 1; 0) \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Câu VII.b: Đặt $u = e^x - 2 \Rightarrow J = \frac{3}{2} [4 - (e^b - 2)^{2/3}]$. Suy ra: $\lim_{b \rightarrow \ln 2} J = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 7

Câu I: 2) x_B, x_C là các nghiệm của phương trình: $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$.

$$S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot d(K, d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$$

Câu II: 1) (1) $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - 4(\cos x - \sin x) - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

$$2) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x \cdot \frac{3}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases} \text{ . Đặt } a = 2x; b = \frac{3}{y} \text{ . } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

Câu III: Đặt $t = \cos x$. $I = \frac{3}{16}(\pi + 2)$

Câu IV: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{SAC} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16} = \frac{1}{3} S_{SAC} \cdot d(B; SAC) \cdot S_{SAC} = \frac{a^2 \sqrt{13} \sqrt{3}}{16} \Rightarrow d(B; SAC) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Câu V: Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$. Vì $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [3; 9]$. (3) $\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ với $t \in [3; 9]$. $f(t)$ đồng biến trên $[3; 9]$. $4 \leq f(t) \leq \frac{48}{7}$.

$$\Rightarrow 4 \leq m \leq \frac{48}{7}$$

Câu VI.a: 1) (C) có tâm $I(1; -2)$, $R = 3$. ABIC là hình vuông cạnh bằng 3 $\Rightarrow IA = 3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |m-1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 7 \end{cases}$$

2) Gọi H là hình chiếu của A trên d $\Rightarrow d(d, (P)) = d(H, (P))$. Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có $AH \geq HI \Rightarrow HI$ lớn nhất khi $A \equiv I$. Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overline{AH}$ làm VTPT $\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0$.

Câu VII.a: Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \frac{3a}{4}; \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geq \frac{3b}{4}; \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3c}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3\sqrt{abc}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu VI.b: 1) Gọi C(a; b), (AB): $x - y - 5 = 0 \Rightarrow d(C; AB) = \frac{|a - b - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}$

$$\Rightarrow |a-b-5|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=8 & (1) \\ a-b=2 & (2) \end{cases}; \quad \text{Trọng tâm } G\left(\frac{a+5}{3}; \frac{b-5}{3}\right) \in (d) \Rightarrow 3a-b=4 \quad (3)$$

$$\bullet (1), (3) \Rightarrow C(-2; 10) \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{65} + \sqrt{89}}$$

$$\bullet (2), (3) \Rightarrow C(1; -1) \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3}{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}$$

2) (S) tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13-m} = IM \quad (m < 13)$. Gọi H là trung điểm của MN
 $\Rightarrow MH = 4 \Rightarrow IH = d(I; d) = \sqrt{-m-3}$

$$(d) \text{ qua } A(0; 1; -1), \text{ VTCP } \vec{u} = (2; 1; 2) \Rightarrow d(I; d) = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AI}|}{|\vec{u}|} = 3$$

$$\text{Vậy: } \sqrt{-m-3} = 3 \Leftrightarrow m = -12$$

Câu VII.b: Điều kiện $x, y > 0$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2 + \log_2(xy) = \log_2(2xy) \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 8

Câu I: 2) Hàm số có CĐ, CT khi $m < 2$. Toạ độ các điểm cực trị là:

$$A(0; m^2 - 5m + 5), B(\sqrt{2-m}; 1-m), C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$$

Tam giác ABC luôn cân tại A $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A khi $m = 1$.

Câu II: 1) • Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 0, \sqrt{5-2x} > 0$, nên (1) luôn đúng

$$\bullet \text{ Với } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}: (1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

$$\text{Tập nghiệm của (1) là } S = \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[2; \frac{5}{2}\right)$$

$$2) (2) \Leftrightarrow (\sin x - 3)(\tan 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } k = 1; 2 \text{ nên } x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{6}$$

Câu III: • Tính $H = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$. Đặt $\sqrt{x} = \cos t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow H = 2 - \frac{\pi}{2}$

$$\bullet \text{ Tính } K = \int_0^1 2x \ln(1+x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Câu IV: Gọi V, V_1 , và V_2 là thể tích của hình chóp S.ABCD, K.BCD và phần còn lại của hình

$$\text{chóp S.ABCD: } \frac{V}{V_1} = \frac{S_{ABCD} \cdot SA}{S_{BCD} \cdot HK} = 2 \cdot \frac{SA}{HK} = 13$$

$$\text{Ta được: } \frac{V}{V_1} = \frac{V_1 + V_2}{V_1} = 1 + \frac{V_2}{V_1} = 13 \Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} = 12$$

Câu V: Điều kiện $abc + a + c = b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{1-ac}$ vì $ac \neq 1$ và $a, b, c > 0$

Đặt $a = \tan A, c = \tan C$ với $A, C \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Ta được $b = \tan(A + C)$

$$(3) \text{ trở thành: } P = \frac{2}{\tan^2 A + 1} - \frac{2}{\tan^2(A + C) + 1} + \frac{3}{\tan^2 C + 1}$$

$$= 2\cos^2 A - 2\cos^2(A + C) + 3\cos^2 C = \cos 2A - \cos(2A + 2C) + 3\cos^2 C$$

$$= 2\sin(2A + C) \cdot \sin C + 3\cos^2 C$$

$$\text{Do đó: } P \leq 2|\sin C| - 3\sin^2 C + 3 = \frac{10}{3} - \left(|\sin C| - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{10}{3}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} |\sin C| = \frac{1}{3} \\ |\sin(2A + C)| = 1 \\ \sin(2A + C) \cdot \sin C > 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ } |\sin C| = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan C = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Từ } |\sin(2A + C)| = 1 \Leftrightarrow \cos(2A + C) = 0 \text{ được } \tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \left(a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = \sqrt{2}; c = \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Câu VI.a: 1) $C\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, AB: $x + 2y + 2 = 0$, AC: $6x + 3y + 1 = 0$

2) Phương trình mp(P) đi qua M và vuông góc với d_2 : $2x - 5y + z + 2 = 0$

$$\text{Toạ độ giao điểm A của } d_1 \text{ và mp(P) là: } A(-5; -1; 3) \Rightarrow d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Câu VII.a: Xét $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + C_n^3 \cdot x^3 + \dots + C_n^n \cdot x^n$

$$\bullet \text{ Lấy đạo hàm 2 vế } n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot x + 3C_n^3 \cdot x^2 + \dots + nC_n^n \cdot x^{n-1}$$

$$\bullet \text{ Lấy tích phân: } n \int_1^2 (1+x)^{n-1} dx = C_n^1 \int_1^2 dx + 2C_n^2 \int_1^2 x dx + 3C_n^3 \int_1^2 x^2 dx + \dots + nC_n^n \int_1^2 x^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + \dots + (2^n - 1)C_n^n = 3^n - 2^n$$

$$\bullet \text{ Giải phương trình } 3^n - 2^n = 3^{2n} - 2^n - 6480 \Leftrightarrow 3^{2n} - 3^n - 6480 = 0 \Rightarrow 3^n = 81 \Leftrightarrow n = 4$$

Câu VI.b: 1) Đường thẳng đi qua các giao điểm của (E) và (P): $x = 2$

$$\text{Tâm I} \in \Delta \text{ nên: } I = (6 - 3b; b). \text{ Ta có: } |6 - 3b - 2| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3b = b \\ 4 - 3b = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ hoặc } (C): x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$2) \text{ Lấy } M \in (d_1) \Rightarrow M(1 + 2t_1; -1 - t_1; t_1); N \in (d_2) \Rightarrow N(-1 + t; -1; -t)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = (t - 2t_1 - 2; t_1; -t - t_1)$$

$$(d) \perp mp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k \cdot \vec{n}; k \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow t - 2t_1 - 2 = t_1 = -t - t_1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t_1 = \frac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow d: x - \frac{1}{5} = y + \frac{3}{5} = z + \frac{2}{5}$$

Câu VII.b: Từ (b) $\Rightarrow y = 2^{x+1}$. Thay vào (a) $\Leftrightarrow x^2 = 1 + 6\log_4 2^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm $(-1; 1), (4; 32)$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 9

Câu I: 2) YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ f(1) = -5m + 7 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$$

Câu II: 1) (1) $\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{2}$

$$2) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ y + x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Câu III: Đặt $t = \sqrt{4x+1}$. $I = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$

Câu IV: $V_{A.BDMN} = \frac{3}{4} V_{S.ABD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABD} = \frac{1}{4} \cdot a \sqrt{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}$

Câu V: Đặt $A = x^2 + xy + y^2$, $B = x^2 - xy - 3y^2$

• Nếu $y = 0$ thì $B = x^2 \Rightarrow 0 \leq B \leq 3$

• Nếu $y \neq 0$ thì đặt $t = \frac{x}{y}$ ta được $B = A \cdot \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = A \cdot \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}$

Xét phương trình: $\frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1} = m \Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m+1)t + m + 3 = 0$ (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-1)(m+3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3-4\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{-3+4\sqrt{3}}{3}$$

Vì $0 \leq A \leq 3$ nên $-3-4\sqrt{3} \leq B \leq -3+4\sqrt{3}$

Câu VI.a: 1) $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $B(-4; 1)$

2) $I(2; 2; 0)$. Phương trình đường thẳng KI: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi H là hình chiếu của I trên (P):

$H(-1; 0; 1)$. Giả sử $K(x_0; y_0; z_0)$.

$$\text{Ta có: } KH = KO \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0-2}{3} = \frac{y_0-2}{2} = \frac{z_0}{-1} \\ \sqrt{(x_0+1)^2 + y_0^2 + (z_0-1)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

Câu VII.a: Từ (b) $\Rightarrow x = 2y$ hoặc $x = 10y$ (c). Ta có (a) $\Leftrightarrow \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y$ (d)

Xét hàm số $f(t) = \ln(1+t) - t$ với $t \in (-1; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$

Từ BBT của $f(t)$ suy ra; nếu phương trình (d) có nghiệm $(x; y)$ với $x \neq y$ thì x, y là 2 số trái dấu, nhưng điều này mâu thuẫn (c).

Vậy hệ chỉ có thể có nghiệm (x, y) với $x = y$. Khi đó thay vào (3) ta được $x = y = 0$

Câu VI.b: 1) Gọi (d) là đường thẳng qua M vuông góc với AD cắt AD, AB lần lượt tại I và N, ta có:

(d): $x + y + 1 = 0$, $I = (d) \cap (AD) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow N(-1; 0)$ (I là trung điểm MN).

$AB \perp CH \Rightarrow pt(AB): x - 2y + 1 = 0$, $A = (AB) \cap (AD) \Rightarrow A(1; 1)$.

$AB = 2AM \Rightarrow AB = 2AN \Rightarrow N$ là trung điểm AB $\Rightarrow B(-3; -1)$.

$pt(AM): 2x - y - 1 = 0$, $C = (AM) \cap (CH) \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

2) Tọa độ giao điểm của d_1 và (P): $A(-2; 7; 5)$

Toạ độ giao điểm của d2 và (P): B(3;-1;1)

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-5}{-4}$

Câu VII.b: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 & (1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$. Thay vào (1) $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 10

Câu I: 2) $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 2(m^2 + 12)$

$\Rightarrow AB$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = 0$. Khi đó $AB = \sqrt{24}$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

2) BPT $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3) \quad (1)$

Đặt $t = \log_2 x$. (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

Câu III: Đặt $\tan x = t$. $I = \int (t^3 + 3t + \frac{3}{t} + t^{-3}) dt = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{3}{2} \tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \tan^2 x} + C$

Câu IV: Kẻ đường cao HK của ΔAA_1H thì HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1 .

Ta có $AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu V: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2005 số 1 và 4 số a^{2009} ta có:

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{2005} + a^{2009} + a^{2009} + a^{2009} + a^{2009} \geq 2009 \cdot \sqrt[2009]{a^{2009} \cdot a^{2009} \cdot a^{2009} \cdot a^{2009}} = 2009 \cdot a^4 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \underbrace{1+1+\dots+1}_{2005} + b^{2009} + b^{2009} + b^{2009} + b^{2009} \geq 2009 \cdot \sqrt[2009]{b^{2009} \cdot b^{2009} \cdot b^{2009} \cdot b^{2009}} = 2009 \cdot b^4 \quad (2)$$

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{2005} + c^{2009} + c^{2009} + c^{2009} + c^{2009} \geq 2009 \cdot \sqrt[2009]{c^{2009} \cdot c^{2009} \cdot c^{2009} \cdot c^{2009}} = 2009 \cdot c^4 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được: $6015 + 4(a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}) \geq 2009(a^4 + b^4 + c^4)$

$\Leftrightarrow 6027 \geq 2009(a^4 + b^4 + c^4)$. Từ đó suy ra $P = a^4 + b^4 + c^4 \leq 3$

Mặt khác tại $a = b = c = 1$ thì $P = 3$ nên giá trị lớn nhất của $P = 3$.

Câu VI.a: 1) Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1, d_2 là:

$$\frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-13=0 & (A_1) \\ 3x-y-4=0 & (A_2) \end{cases}$$

Đường thẳng cần tìm đi qua M(0;1) và song song với A_1, A_2

KL: $x+3y-3=0$ và $3x-y+1=0$

2) Kẻ $CH \perp AB'$, $CK \perp DC' \Rightarrow CK \perp (ADC'B')$ nên ΔCKH vuông tại K.

$\Rightarrow CH^2 = CK^2 + HK^2 = \frac{49}{10}$. Vậy phương trình mặt cầu: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{49}{10}$

Câu VII.a: Có tất cả $C_4^2 \cdot C_5^2 \cdot 4! = 1440$ số.

Câu VI.b: 1) $\begin{cases} A \in (d_1) \\ B \in (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(a; -1-a) \\ B(2b-2; b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MA} = (a-1; -1-a) \\ \overline{MB} = (2b-3; b) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \\ B(-4; -1) \end{cases} \Rightarrow (d): x - 5y - 1 = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} A(0; -1) \\ B(4; 3) \end{cases} \Rightarrow (d): x - y - 1 = 0$$

2) Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(0; 1; 1)$ vuông góc với (d_1) : $3x + 2y + z - 3 = 0$.

Toạ độ giao điểm A của (d_2) và (α) là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y + z - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5/3 \\ z = 8/3 \end{cases}$$

Đường thẳng cần tìm là AM có phương trình: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5}$

Câu VII.b: Ta có: $P = (1 + x^2(1-x))^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} (1-x)^k$. Mà $(1-x)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i x^i$

Để ứng với x^8 ta có: $2k + i = 8; 0 \leq i \leq k \leq 8 \Rightarrow 0 \leq k \leq 4$.

Xét lần lượt các giá trị $k \Rightarrow k = 3$ hoặc $k = 4$ thỏa mãn.

Do vậy hệ số của x^8 là: $a = C_8^3 C_3^2 (-1)^2 + C_8^4 C_4^0 (-1)^0 = 238$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 11

Câu I: Sử dụng điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow M(0; 1)$ và $M(0; -1)$

Câu II: 1) Đặt $\log(x^2 + 1) = y$. PT $\Leftrightarrow y^2 + (x^2 - 5)y - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow y = 5 \vee y = -x^2$

Nghiệm: $x = \pm\sqrt{99999}$; $x = 0$

2) PT $\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$. Vì $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$ nên nghiệm là: $x = 0$

Câu III: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + x + 1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow I = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

Câu IV: $S_{td} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$

Câu V: Vì $0 < x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0$ Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\frac{2}{3} = \frac{2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq x(1-x^2) \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

Tương tự: $\frac{y}{1-y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2$; $\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2$

Khi đó: $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (xy + yz + zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu VI.a: 1) Gọi $A = d \cap (P) \Rightarrow A(1; -3; 1)$.

Phương trình mp(Q) qua A và vuông góc với d: $-x + 2y + z + 6 = 0$

Δ là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow \Delta: \{x = 1 + t; y = -3; z = 1 + t\}$

2) Xét hai trường hợp: $d \perp (Ox)$ và $d \not\perp (Ox) \Rightarrow d: 4x + 9y - 43 = 0$

Câu VII.a: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} z - w - zw = 8 \\ (z - w)^2 + 2(z - w) - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zw = -5 \\ z - w = 3 \end{cases} (a) \vee \begin{cases} zw = -13 \\ z - w = -5 \end{cases} (b)$

(a) $\Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2} \\ z = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} w = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} \\ z = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2} \end{cases};$ (b) $\Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{5 + i\sqrt{27}}{2} \\ z = \frac{-5 + i\sqrt{27}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} w = \frac{5 - i\sqrt{27}}{2} \\ z = \frac{-5 - i\sqrt{27}}{2} \end{cases}$

Câu VI.b: 1) Gọi G là trọng tâm của ABCD ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right). \end{aligned}$$

2) $B = AB \cap Ox \Rightarrow B(1; 0)$, $A \in AB \Rightarrow A(a; 3\sqrt{7}(a-1)) \Rightarrow a > 1$ (do $x_A > 0, y_A > 0$).

Gọi AH là đường cao $\triangle ABC \Rightarrow H(a; 0) \Rightarrow C(2a-1; 0) \Rightarrow BC = 2(a-1), AB = AC = 8(a-1)$.

Chu vi $\triangle ABC = 18 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow C(3; 0), A(2; 3\sqrt{7})$.

Câu VII.b: Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \end{cases}$

$$\Rightarrow 3^u + u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v + v + \sqrt{v^2 + 1} \Leftrightarrow f(u) = f(v), \text{ với } f(t) = 3^t + t + \sqrt{t^2 + 1}$$

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến

$$\Rightarrow u = v \Rightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \Leftrightarrow u - \log_3(u + \sqrt{u^2 + 1}) = 0 \quad (2)$$

Xét hàm số: $g(u) = u - \log_3(u + \sqrt{u^2 + 1}) \Rightarrow g'(u) > 0 \Rightarrow g(u)$ đồng biến

Mà $g(0) = 0 \Rightarrow u = 0$ là nghiệm duy nhất của (2).

KL: $x = y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ PT.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 12

Câu I: 2) (C_m) và Ox có đúng 2 điểm chung phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ có } CD, CT \\ y_{CD} = 0 \text{ hoặc } y_{CT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} (2 \cos x - 1)(\sin x \cos x + 2) = 0 \\ 2 \sin x + \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

2) Đặt $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1}} - 1 = v$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu III: Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{(\sin t + \cos t)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x + \frac{\pi}{4})} = -\frac{1}{2} \cot(x + \frac{\pi}{4}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

Câu IV: $\varphi = \widehat{SCA} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V_{SABC} = \frac{a^3}{6} (\sin \varphi - \sin^3 \varphi)$. Xét hàm số $y = \sin x - \sin^3 x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Từ BBT} \Rightarrow (V_{SABC})_{\max} = \frac{a^3}{6} y_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9} \text{ khi } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Câu V: Đặt $t = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} \Rightarrow t' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}} < 0$

$\Rightarrow t = t(x)$ nghịch biến trên $[-2; 2] \Rightarrow t \in [-2; 2]$. Khi đó: PT $\Leftrightarrow 2m = t^2 + 2t - 4$

Xét hàm $f(t) = t^2 + 2t - 4$ với $t \in [-2; 2]$.

Từ BBT $\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -5 < 2m \leq -4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m \leq -2$

Câu VI.a: 1) PT đường thẳng d cắt tia Ox tại A(a;0), tia Oy tại B(0;b): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a,b>0)

$$M(3; 1) \in d \Rightarrow 1 = \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 12.$$

$$\text{Mà } OA + 3OB = a + 3b \geq 2\sqrt{3ab} = 12 \Rightarrow (OA + 3OB)_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ \frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng d là: } \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0$$

2) Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB $\Rightarrow$ (Q): $x + y - z - 3 = 0$

d là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow d: \begin{cases} x = 2; y = t + 1; z = t \end{cases}$

$$M \in d \Rightarrow M(2; t + 1; t) \Rightarrow AM = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}.$$

Vì AB = $\sqrt{12}$ nên $\triangle MAB$ đều khi MA = MB = AB

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 8t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{18}}{2} \Rightarrow M\left(2; \frac{6 \pm \sqrt{18}}{2}; \frac{4 \pm \sqrt{18}}{2}\right)$$

Câu VII.a: Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n = B$

$$\text{Vì } \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}, \int_0^1 B dx = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n \Rightarrow n+1=13 \Rightarrow n=12$$

$$\bullet \left(\frac{2}{x^3} + x^5\right)^n = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^{n-k} (x^5)^k, T_{k+1} = C_{12}^k \cdot 2^{12-k} \cdot x^{8k-36} \Rightarrow 8k-36=20 \Leftrightarrow k=7$$

$$\Rightarrow \text{Hệ số của } x^{20} \text{ là: } C_{12}^7 \cdot 2^5 = 25344$$

Câu VI.b: 1) Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5 \end{cases}$. $M \in \Delta \Rightarrow M(t; 3t - 5)$

$$S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow d(M, AB) \cdot AB = d(M, CD) \cdot CD \Leftrightarrow t = -9 \vee t = \frac{7}{3} \Rightarrow M(-9; -32), M\left(\frac{7}{3}; 2\right)$$

2) Gọi AB là đường vuông góc chung của $\Delta_1, \Delta_2: A(2t; t; 4) \in \Delta_1, B(3+s; -s; 0) \in \Delta_2$

$$AB \perp \Delta_1, AB \perp \Delta_2 \Rightarrow A(2; 1; 4), B(2; 1; 0)$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình mặt cầu là: } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$$

Câu VII.b: Hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1 = -m-2, x_2 = -m+2$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị

$$\text{là } AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2} \text{ (không đổi)}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 13

Câu I: 2) $AB = \sqrt{\frac{(2m-1)^2}{2} + 4} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow AB$ ngắn nhất $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu II: 1) Đặt $t = |\sin x - \cos x|, t \geq 0$. PT $\Leftrightarrow t - t^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = l\frac{\pi}{2}, (k, l \in \mathbb{Z})$

$$2) \text{ Hệ PT } \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^4 + 2(m-3)x^2 + 2m-4 = 0 & (1) \\ y = \frac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Khi } m = 1: \text{ Hệ PT } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 0 \\ y = \frac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases} \quad (\text{VN})$$

$$\bullet \text{ Khi } m \neq 1. \text{ Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Xét } f(t) = (m-1)t^2 + 2(m-3)t + 2m-4 = 0 \quad (2)$$

Hệ PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm x phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có một nghiệm } t = 0 \text{ và 1 nghiệm } t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S = \frac{2(m-3)}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu III: • $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ Đặt: $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow I = \int_0^1 (t^2 + t^4) dt = \dots = \frac{8}{15}$

• $J = \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx = \int_1^e \frac{d(e^x + \ln x)}{e^x + \ln x} = \ln |e^x + \ln x| \Big|_1^e = \ln \frac{e^e + 1}{e}$

Câu IV: Ta có A'M, B'B, C'N đồng quy tại S. Đặt $V_1 = V_{SBMN}$, $V_2 = V_{SB'A'C'}$, $V = V_{MBNC'A'B'}$.

Ta có $\frac{SB}{SB'} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow SB = \frac{a(a-x)}{x}$, ($0 < x < a$)

Xét phép vị tự tâm S tỉ số $k = 1 - \frac{x}{a}$ ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3$. Mà $V_2 = \frac{1}{3} S_{AA'B'C'} \cdot SB' = \frac{a^4}{6x}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{a^4}{6x} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3$; Do đó: $V = V_2 - V_1 = \frac{a^4}{6x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\right) = \frac{a^3}{6} \left[1 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]$

Theo đề bài $V = \frac{1}{3} a^3 \Leftrightarrow \frac{a^3}{6} \left[1 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right] = \frac{1}{3} a^3 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) - 1 = 0$ (*)

Đặt $t = \left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $t > 0$ (vì $0 < x < a$), PT (*) $\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a$

Câu V: Ta có: $4(x+y) = 5 \Rightarrow 4y = 5 - 4x \Rightarrow S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{20-15x}{x(5-4x)}$, với $0 < x < \frac{5}{4}$

Dựa vào BBT $\Rightarrow \min S = 5$ đạt được khi $x = 1$, $y = \frac{1}{4}$

Câu VI.a: 1) Tâm I là giao điểm của d với đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .
2)

Câu VII.a: $z = 2 - i$; $\bar{z} = 2 + i$

Câu VI.b: 1) Đường thẳng d: $y = ax + b$ gần các điểm đã cho $M_i(x_i; y_i)$, $i = 1, \dots, 5$ nhất thì một điều kiện

cần là $f(a) = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y}_i)^2$ bé nhất, trong đó $\bar{y}_i = ax_i + b$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(163; 50) \Rightarrow 50 = 163a + b \Rightarrow d: y = ax - 163a + 50$.

Từ đó: $f(a) = (48 - 155a + 163a - 50)^2 + (50 - 159a + 163a - 50)^2 + (54 - 163a + 163a - 50)^2 +$
 $+ (58 - 167a + 163a - 50)^2 + (60 - 171a + 163a - 50)^2$

$= (8a - 2)^2 + (4a)^2 + 4^2 + (8 - 4a)^2 + (10 - 8a)^2 = 2(80a^2 - 129a + 92)$. (P)

$\Rightarrow f(a)$ bé nhất khi $a = \frac{129}{160} \Rightarrow b = -\frac{13027}{160}$. Đáp số: $d: y = \frac{129}{160}x - \frac{13027}{160}$

2) OABC là hình chữ nhật $\Rightarrow B(2; 4; 0) \Rightarrow$ Tọa độ trung điểm H của OB là $H(1; 2; 0)$, H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông OCB.

+ Đường thẳng vuông góc với mp(OCB) tại H cắt mặt phẳng trung trực của đoạn OS (mp có phương trình $z = 2$) tại I $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu đi qua 4 điểm O, B, C, S.

+ Tâm I(1; 2; 2) và bán kính $R = OI = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$

Câu VII.b: Chứng minh rằng: $|8a^4 - 8a^2 + 1| \leq 1$, với mọi $a \in [-1; 1]$.

Đặt: $a = \sin x$, khi đó: $|8a^4 - 8a^2 + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |8\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - 8\sin^2 x \cos^2 x| \leq 1$.

$\Leftrightarrow |1 - 8\sin^2 x \cos^2 x| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - 2\sin^2 2x| \leq 1 \Leftrightarrow |\cos 4x| \leq 1$ (đúng với mọi x)

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 14

Câu I: 2) Lấy $M(x_0; y_0) \in (C)$. $d_1 = d(M_0, TCD) = |x_0 + 1|$, $d_2 = d(M_0, TCN) = |y_0 - 2|$.

$$d = d_1 + d_2 = |x_0 + 1| + |y_0 - 2| = |x_0 + 1| + \left| \frac{-3}{x_0 + 1} \right| \stackrel{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$

Câu II: 1) Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$). Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 3 \end{cases}.$

ĐS: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$

2) Dùng công thức hạ bậc. ĐS: $x = k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Câu III: $I = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

Câu IV: $V = \frac{1}{6} ya(a+x). V^2 = \frac{1}{36} a^2(a-x)(a+x)^3. V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{2}.$

Câu V: Áp dụng BĐT Côsi: $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$

Ta có: $\frac{1}{2x+y+x} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right).$

Tương tự cho hai số hạng còn lại. Cộng vế với vế ta được đpcm.

Câu VI.a: 1) Có hai cặp điểm $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right); A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

2) (P): $y + z + 3 + 3\sqrt{2} = 0$ hoặc (P): $y + z + 3 - 3\sqrt{2} = 0$

Câu VII.a: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Câu VI.b: 1) Áp dụng công thức tính bán kính qua tiêu: $FA = x_1 + 2, FB = x_2 + 2. AB = FA = FB = x_1 + x_2 + 4.$

2) Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM.$

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi AM + BM nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M(-1+2t; 1-t; 2t). AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t+6; 2\sqrt{5}).$

Ta có $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2} \end{cases} \Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $\vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{3t}{-3t+6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1; 0; 2)$ và $\min(AM + BM) = 2\sqrt{29}.$ Vậy khi $M(1; 0; 2)$ thì $\min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$

Câu VII.b: $f(x) = 1 - 3\ln(3-x); f'(x) = -3 \frac{1}{(3-x)} (3-x)' = \frac{3}{3-x}$

Ta có: $\frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{2} dt = \frac{3}{\pi} (t - \sin t) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{\pi} [(\pi - \sin \pi) - (0 - \sin 0)] = 3$

$$\text{Khi đó: } f'(x) > \frac{\frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3-x} > \frac{3}{x+2} \\ x < 3; x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)} < 0 \\ x < 3; x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 15

Câu I: 2) A (2; -2) và B(-2;2)

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-\cos x)(\sin 2x - \sin x) = 0 \\ \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

2) Đặt $t = (x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$. PT có nghiệm khi $t^2 + 4t - m = 0$ có nghiệm, suy ra $m \geq -4$.

Câu III: Đặt $\sin^2 x = t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{1}{2} e$

Câu IV: Gọi OH là đường cao của $\triangle OAM$, ta có:

$$\begin{cases} SO = OA \cot \alpha = R \cot \alpha \\ SA = \frac{OA}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha} \end{cases} \Rightarrow AH = SA \sin \beta = R \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{R}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.AOM} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AH \cdot OH = \frac{R^3 \cos \alpha \sin \beta}{3 \sin^3 \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Câu V: Từ gt $\Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow 1+a \geq 0$. Tương tự, $1+b \geq 0, 1+c \geq 0$

$$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 0 \Rightarrow 1+a+b+c+ab+ac+bc+abc \geq 0. \quad (a)$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc = \frac{1}{2}(1+a+b+c)^2 \geq 0. \quad (b)$$

Cộng (a) và (b) $\Rightarrow$ đpcm

Câu VI.a: 1) $P_{M/(C)} = 27 > 0 \Rightarrow M$ nằm ngoài (C). (C) có tâm I(1;-1) và R = 5.

$$\text{Mặt khác: } P_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3MB^2 \Rightarrow MB = 3 \Rightarrow BH = 3 \Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - BH^2} = 4 = d[M, (d)]$$

Ta có: pt(d): $a(x-7) + b(y-3) = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$).

$$d[M, (d)] = 4 \Leftrightarrow \frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{12}{5}b \end{cases}.$$

Vậy (d): $y-3=0$ hoặc (d): $12x-5y-69=0$.

$$2) \text{ Phương trình mp(ABC): } 2x + y - z - 2 = 0. \quad H\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Câu VII.a: Đặt $t = \log_2 x$. PT $\Leftrightarrow t^2 - (7-x)t + 12 - 4x = 0 \Leftrightarrow t = 4; t = 3-x \Leftrightarrow x = 16; x = 2$

Câu VI.b: 1) Ta có: $\overline{AB} = (-1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{5}$. Phương trình AB: $2x + y - 2 = 0$.

$I \in (d): y = x \Rightarrow I(t; t)$. I là trung điểm của AC và BD nên: $C(2t-1; 2t), D(2t; 2t-2)$

$$\text{Mặt khác: } S_{ABCD} = AB \cdot CH = 4 \text{ (CH: chiều cao)} \Rightarrow CH = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ngoài ra: } d(C; AB) = CH \Leftrightarrow \frac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ t = 0 \Rightarrow C(-1; 0), D(0; -2) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ hoặc } C(-1; 0), D(0; -2)$$

$$2) \text{ Gọi mp(P) qua C và vuông góc với AH} \Rightarrow (P) \perp d_1 \Rightarrow (P): x + y - 2z + 1 = 0$$

$$B = (P) \cap d_2 \Rightarrow B(1; 4; 3) \Rightarrow \text{phương trình BC: } \begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 4 - 2t; \\ z = 3 \end{cases}$$

Gọi mp(Q) qua C, vuông góc với d_2 , (Q) cắt d_2 và AB tại K và M. Ta có:

$$(Q): x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow K(2; 2; 4) \Rightarrow M(1; 2; 5) \text{ (K là trung điểm của CM).}$$

$$\Rightarrow ptAB: \frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{-2}, \text{ do } A = AB \cap d_1 \Rightarrow A(1; 2; 5) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\overline{AB}, \overline{AC}] = 2\sqrt{3}.$$

Câu VII.b: PT $\Leftrightarrow f(x) = 2008 - 2007x - 1 = 0$ với $x \in (-\infty; +\infty)$

$$f'(x) = 2008^x \cdot \ln 2008 - 2007; f''(x) = 2008^x \ln^2 2008 > 0, \forall x$$

$\Rightarrow f'(x)$ luôn luôn đồng biến.

$$\text{Vì } f(x) \text{ liên tục và } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -2007; \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \text{ để } f'(x_0) = 0$$

Từ BBT của $f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ không có quá 2 nghiệm.

Vậy PT có 2 nghiệm là $x = 0; x = 1$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 16

Câu I: 2) MN: $x + 2y + 3 = 0$. PT đường thẳng (d) $\perp$ MN có dạng: $y = 2x + m$.

Gọi A, B $\in$ (C) đối xứng nhau qua MN. Hoành độ của A và B là nghiệm của PT:

$$\frac{2x-4}{x+1} = 2x+m \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 4 = 0 \quad (x \neq -1) \quad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có $\Delta = m^2 - 8m - 32 > 0$

Ta có $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1)

$$\text{Trung điểm của AB là } I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; x_1 + x_2 + m\right) \equiv I\left(-\frac{m}{4}; \frac{m}{2}\right) \text{ (theo định lý Vi-et)}$$

$$\text{Ta có } I \in MN \Rightarrow m = -4, (1) \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow A(0; -4), B(2; 0)$$

$$\text{Câu II: 1) PT } \Leftrightarrow \cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{m8\pi}{3} \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 8n\pi$$

$$2) \text{ Nhận xét; } x = \pm 1 \text{ là các nghiệm của PT. PT } \Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1}.$$

Dựa vào tính đơn điệu $\Rightarrow$ PT chỉ có các nghiệm $x = \pm 1$.

$$\text{Câu III: Ta có } \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2}. K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx = e^2$$

Câu IV: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của BC $\widehat{AMS} = \alpha$.

Gọi I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, $I \in SO$; N là hình chiếu của I trên SM, MI là phân giác của $\widehat{AMS} = \alpha$.

$$\text{Ta có } SO = OM \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha \text{ (Với a là độ dài của cạnh đáy)}$$

$$\text{Ta có } SO^2 + OM^2 = SB^2 - BM^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{12} \tan^2 \alpha + \frac{a^2}{12} = 1 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}$$

$$r = OI = OM \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4 + \tan^2 \alpha}}. \text{ Vậy } V = \frac{4\pi \tan^3 \frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{(4 + \tan^2 \alpha)^3}}$$

Câu V: Vì $a + b + c = 2$ nên độ dài mỗi cạnh nhỏ hơn 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho ba số dương: $1 - a, 1 - b, 1 - c$

$$3 - (a + b + c) \geq 3\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq (1-a)(1-b)(1-c) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{27} \geq ab + bc + ca - abc > 1 \Leftrightarrow 2 < 2ab + 2bc + 2ca + 2abc \leq \frac{56}{27}$$

$$\Leftrightarrow 2 < (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) \leq \frac{56}{27} \Leftrightarrow \frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Câu VI.a: 1) Giả sử $AB: 5x - 2y + 6 = 0$; $AC: 4x + 7y - 21 = 0 \Rightarrow A(0;3)$

Phương trình đường cao $BO: 7x - 4y = 0 \Rightarrow B(-4; -7)$

A nằm trên Oy , vậy đường cao AO nằm trên trục $Oy \Rightarrow BC: y + 7 = 0$

$$2) \text{ Gọi } A(a; 0; 0) \in Ox \Rightarrow d(A; (P)) = \frac{|2a|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2a|}{3}; d(A; d) = \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3}$$

$$d(A; (P)) = d(A; d) \Leftrightarrow \frac{|2a|}{3} = \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3} \Leftrightarrow 4a^2 = 8a^2 - 24a + 36 \Leftrightarrow 4a^2 - 24a + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3. \text{ Vậy có một điểm } A(3; 0; 0).$$

Câu VII.a: Vì $\cos x \neq 0$ nên chia tử và mẫu của hàm số cho $\cos^3 x$ ta được: $y = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan^2 x - \tan^3 x}$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow t \in (0; \sqrt{3}]. \text{ Khảo sát hàm số } y = \frac{1+t^2}{2t^2-t^3} \text{ trên nửa khoảng } \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$y' = \frac{t^4 + 3t^2 - 4t}{(2t^2 - t^3)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Từ BBT $\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Câu VI.b: 1) $M \in (D) \Rightarrow M(3b+4; b) \Rightarrow N(2-3b; 2-b)$

$$N \in (C) \Rightarrow (2-3b)^2 + (2-b)^2 - 4(2-b) = 0 \Rightarrow b = 0; b = \frac{6}{5}$$

Vậy có hai cặp điểm: $M(4;0)$ và $N(2;2)$ hoặc $M\left(\frac{38}{5}; \frac{6}{5}\right), N\left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$

2) Ta có $\overline{AB} = (6; -4; 4) \Rightarrow AB // (d)$. Gọi H là hình chiếu của A trên (d)

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và $(P) \perp (d) \Rightarrow (P): 3x - 2y + 2z + 3 = 0$

$H = (d) \cap (P) \Rightarrow H(-1; 2; 2)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $(d) \Rightarrow H$ là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-3; 2; 5)$. Ta có $A, A', B, (d)$ cùng nằm trong một mặt phẳng.

Gọi $M = A'B \cap (d)$. Lập phương trình đường thẳng $A'B \Rightarrow M(2; 0; 4)$

Câu VII.b: Gọi $\beta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \beta^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$

$$\text{Ta có: } r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{3} \\ 3\varphi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{3} \\ \varphi = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \beta = \sqrt[3]{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 17

Câu I: 2) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C): $x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0$, $x \neq 1$ (*)

(*) có 2 nghiệm phân biệt là x_A và $x_B \Rightarrow A(x_A; x_A + m)$, $B(x_B; x_B + m)$,

Theo định lí Viét:
$$\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A \cdot x_B = 1 - m \end{cases}$$

Để ΔOAB vuông tại O thì $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + (x_A + m)(x_B + m) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x_A x_B + m(x_A + x_B) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 - \sin x)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \\ (1 + \sin x)(\cos x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

2) (b) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} = 14 \Leftrightarrow xy + 2\sqrt{(xy)^2 + xy + 4} = 11$ (c)

Đặt $xy = p$. (c) $\Leftrightarrow 2\sqrt{p^2 + p + 4} = 11 - p \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 11 \\ 3p^2 + 26p - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ p = -35/3 \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow (x + y)^2 = 3xy + 3 \bullet p = xy = -\frac{35}{3}$ (loại) $\bullet p = xy = 3 \Rightarrow x + y = \pm 2\sqrt{3}$

1/ Với $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{3}$ 2/ Với $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = y = -\sqrt{3}$

Vậy hệ có hai nghiệm là: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

Câu III: $I = \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin 2x dx + \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x dx$

$\bullet I_1 = \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin 2x dx$. Đặt $\cos x = t \Rightarrow I_1 = 2$

$\bullet I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos 3x) dx = \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow I = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Câu IV: Gắn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $C(a; a; 0)$, $S(0; 0; a)$,

$$M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) \Rightarrow [\overline{BN}, \overline{BM}] = \left(-\frac{a^2}{4}; -\frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V_{BMND} = \frac{1}{6} |[\overline{BN}, \overline{BM}] \cdot \overline{BD}| = \frac{a^3}{24}$$

Mặt khác, $V_{BMND} = \frac{1}{3} S_{BMN} \cdot d(D, (BMN))$, $S_{BMN} = \frac{1}{2} |[\overline{BN}, \overline{BM}]| = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow d(D, (BMN)) = \frac{3V_{BMND}}{S_{BMN}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Câu V: Xét hàm số: $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x \Rightarrow f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm số đồng biến và $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Kiểm tra thấy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của $f'(x) = 0$.

$$\text{Dựa vào BBT của } f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu VI.a: 1) d: $a(x-1) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 2b = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$)

Vì d cắt (C) theo dây cung có độ dài bằng 8 nên khoảng cách từ tâm $I(2; -1)$ của (C) đến d bằng 3.

$$d(I, d) = \left| \frac{2a - b - a - 2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = 3 \Leftrightarrow |a - 3b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 8a^2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{3}{4}b \end{cases}$$

• $a = 0$: chọn $b = 1 \Rightarrow d: y - 2 = 0$

• $a = -\frac{3}{4}b$: chọn $a = 3, b = -4 \Rightarrow d: 3x - 4y + 5 = 0$.

2) Do $(\beta) \parallel (\alpha)$ nên (β) có phương trình $2x + 2y - z + D = 0$ ($D \neq 17$)

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$

Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính $r = 3$.

Khoảng cách từ I tới (β) là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\text{Do đó } \frac{|2 \cdot 1 + 2(-2) - 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 4 \Leftrightarrow |-5 + D| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -7 \\ D = 17 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy (β) có phương trình $2x + 2y - z - 7 = 0$

Câu VII.a: Gọi A là biến cố lập được số tự nhiên chia hết cho 5, có 5 chữ số khác nhau.

* Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau: $A_5^5 - A_7^4 = 5880$ số

* Số các số tự nhiên chia hết cho 5 có 5 chữ số khác nhau: $A_7^4 + 6 \cdot A_6^3 = 1560$ số

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1560}{5880} = \frac{13}{49}$$

Câu VI.b: 1) Đường thẳng BC có VTCP là: $\vec{U} = (3; -4) \Rightarrow$ phương trình BC: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$

$\Rightarrow$ Toạ độ điểm $C(-1; 3)$

+ Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d_2 , I là giao điểm của BB' và d_2 .

$$\Rightarrow \text{phương trình } BB': \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$$

$$+ \text{Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: } \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(3; 1)$$

$$+ \text{Vì I là trung điểm } BB' \text{ nên: } \begin{cases} x_{B'} = 2x_I - x_B = 4 \\ y_{B'} = 2y_I - y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(4; 3)$$

+ Đường AC qua C và B' nên có phương trình: $y - 3 = 0$.

$$+ \text{Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: } \begin{cases} y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 3)$$

2) Theo giả thiết ta có $M(m; 0; 0) \in Ox, N(0; n; 0) \in Oy, P(0; 0; p) \in Oz$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{DP} = (1; -1; p-1); \vec{NM} = (m; -n; 0) \\ \vec{DN} = (1; n-1; -1); \vec{PM} = (m; 0; -p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{DP} \cdot \vec{NM} = m + n \\ \vec{DN} \cdot \vec{PM} = m + p \end{cases}$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \text{ Vì } D \in (\alpha) \text{ nên: } \frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1.$$

$$D \text{ là trực tâm của } \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DP} \perp \overline{NM} \\ \overline{DN} \perp \overline{PM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DP} \cdot \overline{NM} = 0 \\ \overline{DN} \cdot \overline{PM} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ m+p=0 \\ \frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=p=3 \end{cases}$$

Kết luận, phương trình của mặt phẳng (α): $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$

Câu VII.b: $S = C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \dots + C_{2009}^{1004} \quad (1)$

$$\Leftrightarrow S = C_{2009}^{2009} + C_{2009}^{2008} + C_{2009}^{2007} + \dots + C_{2009}^{1005} \quad (2) \text{ (vì } C_n^k = C_n^{n-k} \text{)}$$

$$\Rightarrow 2S = C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \dots + C_{2009}^{1004} + C_{2009}^{1005} + \dots + C_{2009}^{2009} = (1+1)^{2009}$$

$$\Rightarrow S = 2^{2008}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 18

Câu I: 2) Ta có: $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right), \quad x_0 \neq 2, \quad y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M: $\Delta: y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là: $A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right); \quad B(2x_0-2; 2)$

Ta có: $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 2x_0 - 2}{2} = x_0 = x_M, \quad \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M \Rightarrow M$ là trung điểm AB.

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp ΔIAB có diện tích:

$$S = \pi IM^2 = \pi \left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2 \right)^2 \right] = \pi \left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2} \right] \geq 2\pi$$

Dấu “=” xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_0=3 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1) \text{ và } M(3; 3)$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \sin x \left(\sin \frac{x}{2} - 1 \right) \left(2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pi + k4\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi$

2) BPT $\Leftrightarrow x[\log_2(1-2x)+1] < 0 \quad \left(x < \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x < 0$

Câu III: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx + 3 \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2(2-\sqrt{2})}{3} + \frac{2e^3+1}{3} = \frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$

Câu IV: Dùng định lí cosin tính được: $SB = a, SC = a$.

Gọi M là trung điểm của SA. Hai tam giác SAB và SAC cân nên $MB \perp SA, MC \perp SA$. Suy ra $SA \perp (MBC)$.

Ta có $V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{A.MBC} = \frac{1}{3} MA \cdot S_{MBC} + \frac{1}{3} SA \cdot S_{MBC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{MBC}$

Hai tam giác SAB và SAC bằng nhau. Do đó $MB = MC \Rightarrow \Delta MBC$ cân tại M. Gọi N là trung điểm của BC $\Rightarrow MN \perp BC$. Tương tự $MN \perp SA$.

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} MN \cdot BC = \frac{1}{6} a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3}{16}.$

Câu V: Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} (*)$$

$$\text{Áp dụng (*) ta có } P = \frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{9}{\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có :

$$\sqrt[3]{(a+3b)1.1} \leq \frac{a+3b+1+1}{3} = \frac{1}{3}(a+3b+2)$$

$$\sqrt[3]{(b+3c)1.1} \leq \frac{b+3c+1+1}{3} = \frac{1}{3}(b+3c+2)$$

$$\sqrt[3]{(c+3a)1.1} \leq \frac{c+3a+1+1}{3} = \frac{1}{3}(c+3a+2)$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq \frac{1}{3}[4(a+b+c)+6] \leq \frac{1}{3}\left[4 \cdot \frac{3}{4} + 6\right] = 3$$

$$\text{Do đó } P \geq 3. \text{ Dấu } = \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \frac{3}{4} \\ a+3b = b+3c = c+3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{4}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $a=b=c = \frac{1}{4}$.

Câu VI.a: 1) d_1 VTCP $\vec{a}_1 = (2; -1)$; d_2 VTCP $\vec{a}_2 = (3; 6)$

Ta có: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$ nên $d_1 \perp d_2$ và d_1 cắt d_2 tại một điểm I khác P. Gọi d là đường thẳng đi qua P(2; -1) có phương trình:

$$d: A(x-2) + B(y+1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A + B = 0$$

d cắt d_1, d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh I $\Leftrightarrow$ khi d tạo với d_1 (hoặc d_2) một góc 45°

$$\Leftrightarrow \frac{|2A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow 3A^2 - 8AB - 3B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3B \\ B = -3A \end{cases}$$

* Nếu $A = 3B$ ta có đường thẳng $d: 3x + y - 5 = 0$

* Nếu $B = -3A$ ta có đường thẳng $d: x - 3y - 5 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. $d: 3x + y - 5 = 0$; $d: x - 3y - 5 = 0$

2) Dễ thấy $A'(1; -1; 0)$

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 2y - 2z + 1 = 0$

$$\Rightarrow (S) \text{ có tâm } I\left(\frac{5}{2}; 1; 1\right), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

+) Gọi H là hình chiếu của I lên (P). H là tâm của đường tròn (C)

+) Phương trình đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc với (P).

$$d: \begin{cases} x = 5/2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$$

$$IH = \sqrt{\frac{75}{36}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}, (C) \text{ có bán kính } r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{29}{4} - \frac{75}{36}} = \sqrt{\frac{31}{6}} = \frac{\sqrt{186}}{6}$$

Câu VII.a: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$|x^2 - 4x| = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } S = \left| \int_0^2 (|x^2 - 4x| - 2x) dx \right| + \left| \int_2^6 (|x^2 - 4x| - 2x) dx \right| = \frac{4}{3} + 16 = \frac{52}{3}$$

Câu VI.b: 1) (H) có các tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0)$. Hình chữ nhật cơ sở của (H) có một đỉnh là $M(4;3)$,

Giả sử phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b$)

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0) \Rightarrow a^2 - b^2 = 5^2$ (1)

$$M(4;3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ: } \begin{cases} a^2 = 5^2 + b^2 \\ 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 40 \\ b^2 = 15 \end{cases}. \text{ Vậy (E): } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$$

$$2) \text{ Chuyển phương trình d về dạng tham số ta được: } \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(-1;0;4)$

* (d) có vector chỉ phương là $\vec{a}(2;1;1)$, mp(P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}(1;2;-1)$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{n}] = (-3;3;3)$. Gọi $\vec{u}$ là vector chỉ phương của $\Delta \Rightarrow \vec{u}(-1;1;1)$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = 4 + u \end{cases}. \text{ Vì } M \in \Delta \Rightarrow M(-1 - u; u; 4 + u), \Rightarrow \overline{AM}(1 - u; u - 3; u)$$

$$AM \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow AM \perp \Delta \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1 - u) + 1(u - 3) + 1 \cdot u = 0$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } M\left(\frac{-7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$$

$$\text{Câu VII.b: PT (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 1 + xy = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } x = 0 \text{ thay vào (1): } 2 + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^y \Leftrightarrow 8 + 2^y = 12 \cdot 2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$$

$$* \text{ Với } \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \text{ thay } y = 1 - 3x \text{ vào (1) ta được: } 2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3 \cdot 2 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = 2^{3x+1}. \text{ Vì } x \geq -1 \text{ nên } t \geq \frac{1}{4}$$

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - \sqrt{8} \text{ (loại)} \\ t = 3 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2(3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2(3 + \sqrt{8}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 \frac{8}{11} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2(3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2(3 + \sqrt{8}) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 19

Câu I: 2) d có phương trình $y = m(x - 3) + 4$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = m(x - 3) + 4 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 - m = 0 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có điều kiện $m > 0$ và $y'(\sqrt{m}) \cdot y'(-\sqrt{m}) = -1$

$$\Rightarrow (3m - 6\sqrt{m})(3m + 6\sqrt{m}) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 - 36m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{18 \pm 3\sqrt{35}}{9} \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu II: 1) $y = 0$ không phải là nghiệm. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(x + y - 2) = 1 \end{cases}$

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}, v = x + y - 2$. Ta có hệ $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases}$

Nghiệm của hpt đã cho là $(1; 2), (-2; 5)$.

2) Điều kiện: $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

Ta có $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$

PT $\Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ (loại)} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu III: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + x + 1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 1) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

Câu IV: Gọi M là trung điểm của BC, gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AA'. Khi đó (P) $\equiv$ (BCH). Do góc $\widehat{A'AM}$ nhọn nên H nằm giữa AA'. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi (P) là tam giác BCH.

Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Theo bài ra $S_{BCH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} HM \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$$

Do $\Delta A'O$ và ΔMAH đồng dạng nên $\frac{A'O}{AO} = \frac{HM}{AH} \Rightarrow A'O = \frac{AO \cdot HM}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3a} = \frac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ: $V = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} A'O \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu V: Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} = \frac{1}{a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$

Tương tự $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}$, $\frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ca + a + 1}$

$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{b + 1 + ab} + \frac{b}{1 + ab + b} \right) = \frac{1}{2}$

$P = \frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$

Câu VI.a: 1) Điểm $C \in CD: x + y - 1 = 0 \Rightarrow C(t; 1 - t)$.

Suy ra trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2}; \frac{3-t}{2}\right)$.

Từ $A(1; 2)$, kẻ $AK \perp CD: x + y - 1 = 0$ tại I (điểm $K \in BC$).

Suy ra $AK: (x - 1) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

Tọa độ điểm I thỏa hệ: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1)$

Tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm của $AK \Rightarrow$ tọa độ của $K(-1; 0)$.

Đường thẳng BC đi qua C, K nên có phương trình: $\frac{x+1}{-7+1} = \frac{y}{8} \Leftrightarrow 4x + 3y + 4 = 0$

2) Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ , thì $(P) \parallel (D)$ hoặc $(P) \supset (D)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Ta luôn có $IH \leq IA$ và $IH \perp AH$.

Mặt khác $\begin{cases} d((D), (P)) = d(I, (P)) = IH \\ H \in (P) \end{cases}$

Trong (P) , $IH \leq IA$; do đó $\max IH = IA \Leftrightarrow H \equiv A$. Lúc này (P) ở vị trí $(P_0) \perp IA$ tại A .

Vectơ pháp tuyến của (P_0) là $\vec{n} = \vec{IA} = (6; 0; -3)$, cùng phương với $\vec{v} = (2; 0; -1)$.

Phương trình của mặt phẳng (P_0) là: $2(x - 4) - 1 \cdot (z + 1) = 2x - z - 9 = 0$.

Câu VII.a: Ta có $I = \int_0^2 (1+x)^n dx = \int_0^2 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) dx$

$$= \left(C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1} \right) \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow I = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n \quad (1). \quad \text{Mặt khác } I = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \Big|_0^2 = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } 2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\text{Theo bài ra thì } \frac{3^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{6560}{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1} = 6561 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{Ta có khai triển } \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \right)^7 = \sum_0^7 C_7^k (\sqrt{x})^{7-k} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \right)^k = \sum_0^7 \frac{1}{2^k} C_7^k x^{\frac{14-3k}{4}}$$

$$\text{Số hạng chứa } x^2 \text{ ứng với } k \text{ thỏa mãn } \frac{14-3k}{4} = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

Vậy hệ số cần tìm là $\frac{1}{2^2}C_7^2 = \frac{21}{4}$

Câu VI.b: 1) Do $B \in d_1$ nên $B(m; -m-5)$, $C \in d_2$ nên $C(7-2n; n)$

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\begin{cases} 2+m+7-2n=3.2 \\ 3-m-5+n=3.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -4), C(5; 1)$

$\Rightarrow$ PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC : $x^2 + y^2 - \frac{83}{27}x + \frac{17}{9}y - \frac{338}{27} = 0$

2) Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow G\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$

Ta có $F = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2$
 $= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

F nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên (P)

$$\Leftrightarrow MG = d(G, (P)) = \frac{\left| \frac{7}{3} - \frac{8}{3} - 3 - 3 \right|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{19}{3\sqrt{3}}$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{56}{9} + \frac{32}{9} + \frac{104}{9} = \frac{64}{3}$$

Vậy F nhỏ nhất bằng $3 \cdot \left(\frac{19}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{64}{3} = \frac{553}{9}$ khi M là hình chiếu của G lên (P)

Câu VII.b: Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = x+y+1 \\ e^{x+y} = x-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u+1 \\ e^u = v+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u+1 \\ e^u - e^v = v-u \end{cases} \quad (1)$

• Nếu $u > v$ hoặc $u < v$ thì (2) vô nghiệm

• Nên (2) $\Leftrightarrow u = v$. Thế vào (1) ta có $e^u = u+1$ (3). Xét $f(u) = e^u - u - 1$, $f'(u) = e^u - 1$

Từ BBT của $f(u)$ ta có $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Do đó (3) có 1 nghiệm $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 20

Câu I: 2) Đặt $2\sin x + \frac{1}{2} = t \Rightarrow t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ và $g(x) = f(t) = t^3 - 3t^2 + 4$.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - 3 \cdot \frac{9}{4} + 4 = \frac{-27-54+32}{8} = -\frac{49}{8};$$

$$f_{CD} = f(0) = 4; f_{CT} = f(2) = 0; \Rightarrow \text{Max} = 4, \text{Min} = -\frac{49}{8}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - 3 \cdot \frac{25}{4} + 4 = \frac{125-150+32}{8} = \frac{7}{8}$$

Câu II: 1) ĐKXĐ: $x > -1, mx > 0$. Như vậy trước hết phải có $m \neq 0$.

Khi đó, PT $\Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \quad (1)$

Phương trình này có: $\Delta = m^2 - 4m$.

• Với $m \in (0; 4) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

• Với $m = 0$, (1) có nghiệm duy nhất $x = -1 < 0 \Rightarrow$ loại.

• Với $m = 4$, (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$ thỏa ĐKXĐ nên PT đã cho có nghiệm duy nhất.

- Với $m < 0$, ĐKXĐ trở thành $-1 < x < 0$. Khi đó $\Delta > 0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Mặt khác, $f(-1) = m < 0, f(0) = 1 > 0$ nên $x_1 < -1 < x_2 < 0$, tức là chỉ có x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Như vậy, các giá trị $m < 0$ thỏa điều kiện bài toán.
- Với $m > 4$. Khi đó, điều kiện xác định trở thành $x > 0$ và (1) cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Áp dụng định lý Viet, ta thấy cả hai nghiệm này đều dương nên các giá trị $m > 4$ cũng bị loại.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $m \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

2) ĐKXĐ: $x \neq \frac{k\pi}{2}$ sao cho $\sin 2x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, VT} &= \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x \\ &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2 \sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin 2x \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 (> 0) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Để thỏa mãn điều kiện $\sin x + \cos x \geq 0$, các nghiệm chỉ có thể là: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Câu III: Ta có:
$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} &= \frac{1 - \sqrt{2x+1} + e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{2x+1} + e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = \left(\frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \cdot \frac{x(\sqrt{3x+4} + 2 + x)}{(3x+4) - (2+x)^2} \\ &= \left(\frac{-2x}{x(1 + \sqrt{2x+1})} + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) \cdot \frac{x(\sqrt{3x+4} + 2 + x)}{-x - x^2} = - \left(\frac{-2}{1 + \sqrt{2x+1}} + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) \cdot \frac{\sqrt{3x+4} + 2 + x}{1+x} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = -(-1+2) \cdot 4 = -4 \end{aligned}$$

Câu IV: Ta có: $CD^2 = 10 = AC^2 + AD^2$; $DB^2 = 5 = AD^2 + AB^2$; $BC^2 = 13 = AB^2 + AC^2$;

Do đó tứ diện $ABCD$ có ba mặt là ba tam giác vuông tại cùng đỉnh A .

Lấy các điểm E, F, G, H sao cho đa diện $ABEC.DGHF$ là hình hộp chữ nhật. Hiển nhiên, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp. Tâm mặt cầu này là

$$\text{trung điểm } I \text{ của đoạn } AH, \text{ còn bán kính là } R = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Câu V: Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{(3-x)^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{x-3}{\sqrt{(3-x)^2 + 5}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 6x + 14} = (3-x)\sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2x^2 + 18x - 27 = 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai có $\Delta' = 81 + 54 = 135 = 9 \cdot 15$, và hai nghiệm: $x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3\sqrt{15}}{2}$

Dễ kiểm tra rằng cả hai nghiệm này đều bị loại vì nhỏ hơn 2. Vậy, đạo hàm của hàm số không thể đổi dấu trên $[2; \infty)$, ngoài ra $f'(3) > 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \geq 2$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(2) = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.

Cũng dễ thấy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Từ đó suy ra: hệ phương trình đã cho có nghiệm (với $x \geq 2$)

khi và chỉ khi $m \geq \sqrt{6} + \sqrt{7}$.

Câu VI.a: 1) Điểm $D(d; 0)$ thuộc đoạn BC là chân đường phân giác trong của góc A

khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{d - \frac{1}{4}}{2 - d} = \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \Rightarrow 4d - 1 = 6 - 3d \Rightarrow d = 1.$

Phương trình AD: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$; AC: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow 3x + 4y - 6 = 0$

Giả sử tâm I của đường tròn nội tiếp có tung độ là b . Khi đó hoành độ là $1 - b$ và bán kính cũng bằng b . Vì khoảng cách từ I tới AC cũng phải bằng b nên ta có:

$$\frac{|3(1-b) + 4b - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = b \Leftrightarrow |b - 3| = 5b \Rightarrow \begin{cases} b - 3 = 5b \Rightarrow b = -\frac{4}{3} \\ b - 3 = -5b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rõ ràng chỉ có giá trị $b = \frac{1}{2}$ là hợp lý. Vậy, phương trình của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

2) Mặt phẳng P' đi qua đường thẳng d' có phương trình dạng:

$$m(2x + 3y + 11) + n(y - 2z + 7) = 0 \Leftrightarrow 2mx + (3m + n)y - 2nz + 11m + 7n = 0.$$

Để mặt phẳng này đi qua M , phải có: $m(-8 - 15 + 11) + n(-5 - 6 + 7) = 0 \Leftrightarrow n = -3m$

Chọn $m = 1, n = -3$, ta được phương trình của P' : $2x + 6z - 10 = 0$.

Đường thẳng d'' đi qua $A(2; -1; 1)$ và VTCP $\vec{m} = (2; 3; -5)$. Mặt phẳng P'' đi qua M và d'' có hai VTCP là $\vec{m}$ và $\vec{MA}(6; 4; -2)$ hoặc $\vec{n}(3; 2; -1)$. Vector pháp tuyến của P'' là:

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (7; -13; -5).$$

Phương trình của P'' : $7(x + 4) - 13(y + 5) - 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 7x - 13y - 5z - 29 = 0.$

Đường thẳng d phải là giao tuyến của P' và P'' nên có phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 6z - 10 = 0 \\ 7x - 13y - 5z - 29 = 0 \end{cases}$$

Câu VII.a: Điều kiện: $n \geq 3$.

Theo giả thiết thì: $n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) = 9n^2 - 14n \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow n = 7$

Câu VI.b: 1) Giả sử $M(x, y)$ là điểm thuộc elip. Vì bán trục lớn của elip là $a = \frac{c}{e} = \frac{3}{0,6} = 5$

nên ta có: $MF_1 + MF_2 = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = 10$
 $\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

2) Mặt phẳng Q đi qua d có phương trình dạng: $m(x - 2z) + n(3x - 2y + z + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (m + 3n)x - 2ny + (-2m + n)z + 5n = 0$$

$(Q) \perp (P) \Leftrightarrow 1.(m + 3n) - 2(-2n) + 1.(-2m + n) = 0 \Leftrightarrow -m + 8n = 0$

Chọn $m = 8, n = 1$, ta được phương trình của Q : $11x - 2y - 15z + 5 = 0.$

Vì hình chiếu d' của d trên P là giao tuyến của P và Q nên phương trình của d' sẽ là:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 11x - 2y - 15z + 5 = 0 \end{cases}$$

Câu VII.b: Ta chứng minh rằng $C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n$ giảm khi k tăng, tức là:

$$C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n > C_{2n+k+1}^n C_{2n-k-1}^n. \quad (3)$$

Thật vậy, ta có chuỗi các biến đổi tương đương sau đây:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(2n+k)!(2n-k)!}{n!(n+k)!n!(n-k)!} > \frac{(2n+k+1)!(2n-k-1)!}{n!(n+k+1)!n!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-k}{n-k} > \frac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n-k} + 1 > \frac{n}{n+k+1} + 1.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên; từ đó suy ra (3) đúng.

Do đó, $C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n$ lớn nhất khi $k=0$ và nhỏ nhất khi $k=n$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 21

Câu I: 2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và $d: x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ g(0) = m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (a).$$

$$\text{Mặt khác: } d(K, d) = \frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Do đó: } S_{AKBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot d(K, d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow BC^2 = 256$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 256 \text{ với } x_B, x_C \text{ là hai nghiệm của phương trình (2).}$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + ((x_B + 4) - (x_C + 4))^2 = 256 \Leftrightarrow 2(x_B - x_C)^2 = 256 \Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C = 128$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (thỏa (a)). Vậy } m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Câu II: 1) * Đặt: $t = 2^x$; điều kiện: $t > 0$. Khi đó BPT $\Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t$ (2)

$$\bullet t \geq 1: (2) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq 9t^2-6t+1 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 4 \quad (a)$$

$$\bullet 0 < t \leq 1: (2) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq t+1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq t^2+2t+1 \Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad (b)$$

$$\Rightarrow 0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < 2^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2. \text{ Vậy, bất phương trình có nghiệm: } x \leq 2.$$

$$2) \text{ PT } \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0; x \in (0; 1) \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } t = \log_2 x. \text{ Vì: } \lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 x = 0, \text{ nên: với } x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow t^2 - t - m = 0, t < 0 \quad (2) \Leftrightarrow m = -t^2 - t, t < 0$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} y = -t^2 - t, & t < 0: (P) \\ y = m & : (d) \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số: } y = f(t) = -t^2 - t, \text{ với } t < 0 \Rightarrow f'(t) = -2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$\text{Từ BBT ta suy ra: } (1) \text{ có nghiệm } x \in (0; 1) \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t < 0$$

$$\Leftrightarrow (d) \text{ và } (P) \text{ có điểm chung, với hoành độ } t < 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy, giá trị } m \text{ cần tìm: } m \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Câu III: Đặt: } x = \frac{1}{t} \Rightarrow I = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^6}{t^2+1} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{117-41\sqrt{3}}{135} + \frac{\pi}{12}$$

Câu IV: Dựng $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và SH là đường cao của hình chóp.

Dựng $HN \perp BC$, $HP \perp AC \Rightarrow SN \perp BC$, $SP \perp AC \Rightarrow \widehat{SPH} = \widehat{SNH} = \alpha$

$\Delta SHN = \Delta SHP \Rightarrow HN = HP$.

ΔAHP vuông có: $HP = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; ΔSHP vuông có: $SH = HP \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tan \alpha$

Thể tích hình chóp $S.ABC$: $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \tan \alpha \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16} \tan \alpha$

Câu V: Với $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ thì $0 < \tan x \leq \sqrt{3}$ và $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, 2\cos x - \sin x \neq 0$

$$\bullet y = \frac{\frac{\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{2\cos x - \sin x}{\cos x}} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x(2 - \tan x)} = \frac{1 + \tan^2 x}{2\tan^2 x - \tan^3 x}$$

$$\bullet \text{Đặt: } t = \tan x; 0 < t \leq \sqrt{3} \Rightarrow y = f(t) = \frac{1+t^2}{2t^2-t^3}; 0 < t \leq \sqrt{3}$$

$$f'(t) = \frac{t^4 + 3t^2 - 4t}{(2t^2 - t^3)^2} = \frac{t(t^3 + 3t - 4)}{(2t^2 - t^3)^2} = \frac{t(t-1)(t^2 + t + 4)}{(2t^2 - t^3)^2} \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t=0 \vee t=1).$$

• Từ BBT ta có: $\min f(t) = 2 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Vậy: $\min y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Câu VI.a: 1) Gọi $C(a; b)$, (AB) : $x - y - 5 = 0 \Rightarrow d(C; AB) = \frac{|a - b - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}$

$$\Rightarrow |a - b - 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 8 & (1) \\ a - b = 2 & (2) \end{cases}; \text{Trọng tâm } G\left(\frac{a+5}{3}; \frac{b-5}{3}\right) \in (d) \Rightarrow 3a - b = 4 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (3)} \Rightarrow C(-2; 10) \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{65} + \sqrt{89}}$$

$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow C(1; -1) \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3}{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}.$$

$$2) d(A, (d)) = \frac{[\overrightarrow{BA}, \vec{a}]}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4+196+100}}{\sqrt{4+1+1}} = 5\sqrt{2}$$

Phương trình mặt cầu tâm $A(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$:
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

$$\text{Câu VII.a: PT} \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z - \frac{1}{z} \right) + \frac{5}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z - \frac{1}{z} \right) + \frac{5}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt ẩn số phụ: } t = z - \frac{1}{z}. (1) \Leftrightarrow t^2 - t + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(t = \frac{1+3i}{2} \vee t = \frac{1-3i}{2} \right)$$

Đáp số có 4 nghiệm z : $1+i$; $1-i$; $\frac{-1+i}{2}$; $\frac{-1-i}{2}$.

Câu VI.b: 1) (C_1) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 2$.

(C_2) : $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$ có tâm $I_2(4; 1)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta có: $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau tại $A(3; 1)$

$\Rightarrow (C_1)$ và (C_2) có 3 tiếp tuyến, trong đó có 1 tiếp tuyến chung trong tại A là $x = 3 // Oy$.

* Xét 2 tiếp tuyến chung ngoài: $(\Delta): y = ax + b \Leftrightarrow (\Delta): ax - y + b = 0$ ta có:

$$\begin{cases} d(I_1; \Delta) = R_1 \\ d(I_2; \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \\ \frac{|4a+b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{4-7\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{4+7\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Vậy, có 3 tiếp tuyến chung: $(\Delta_1): x=3, (\Delta_2): y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{4+7\sqrt{2}}{4}, (\Delta_3): y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{4-7\sqrt{2}}{4}$

2) (d_1) có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$; (d_2) có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; 3; 1)$

$$K \in (d_2) \Rightarrow K(t'; 3t' - 6; t' - 1) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t' - 1; 3t' - 5; t' - 2)$$

$$\overrightarrow{IK} \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow t' - 1 + 9t' - 15 + t' - 2 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{18}{11} \Rightarrow K\left(\frac{18}{11}; -\frac{12}{11}; \frac{7}{11}\right)$$

Giả sử (d) cắt (d_1) tại $H(t; 4+t; 6+2t), (H \in (d_1))$. $\overrightarrow{HK} = \left(\frac{18}{11} - t; -\frac{56}{11} - t; -\frac{59}{11} - 2t\right)$

$$\overrightarrow{HK} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow \frac{18}{11} - t - \frac{56}{11} - t - \frac{118}{11} - 4t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{26}{11} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{1}{11}(44; -30; -7).$$

$$\text{Vậy, phương trình tham số của đường thẳng } (d): \begin{cases} x = \frac{18}{11} + 44\lambda \\ y = -\frac{12}{11} - 30\lambda \\ z = -\frac{7}{11} - 7\lambda \end{cases}$$

Câu VII.b: Xét đa thức: $f(x) = x(1+x)^{2009} = x(C_{2009}^0 + C_{2009}^1 x + C_{2009}^2 x^2 + \dots + C_{2009}^{2009} x^{2009})$
 $= C_{2009}^0 x + C_{2009}^1 x^2 + C_{2009}^2 x^3 + \dots + C_{2009}^{2009} x^{2010}.$

$$\bullet \text{ Ta có: } f'(x) = C_{2009}^0 + 2C_{2009}^1 x + 3C_{2009}^2 x^2 + \dots + 2010C_{2009}^{2009} x^{2009}$$

$$\Rightarrow f'(1) = C_{2009}^0 + 2C_{2009}^1 + 3C_{2009}^2 + \dots + 2010C_{2009}^{2009} \quad (a)$$

$$\bullet \text{ Mặt khác: } f'(x) = (1+x)^{2009} + 2009(1+x)^{2008} x = (1+x)^{2008}(2010+x)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2011 \cdot 2^{2008} \quad (b)$$

$$\bullet \text{ Từ (a) và (b) suy ra: } S = 2011 \cdot 2^{2008}.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 22

$$\text{Câu I: 2) Ta có: } y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = m + 4 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị $A(0; m)$ và $B(-2; m+4)$

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (0; m), \overrightarrow{OB} = (-2; m+4)$. Để $\widehat{AOB} = 120^\circ$ thì $\cos AOB = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2(4+(m+4)^2)}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ m = \frac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Câu II: 1) PT } \Leftrightarrow \sin 3x - \cos 3x = \sin 2x(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

2) Điều kiện: $x \leq 3$. Đặt $t = 2^{\sqrt{3-x}} \geq 0$. BPT $\Leftrightarrow \sqrt{8+2t-t^2} + 2t \leq 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8+2t-t^2} \leq 5-2t \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2t \geq 0 \\ 8+2t-t^2 \geq 0 \\ 5t^2-22t+17 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{5}{2} \\ -2 \leq t \leq 4 \\ t \leq 1; t \geq \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

Với $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 2^{\sqrt{3-x}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$

Câu III: Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $1 + \sqrt{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

$$\text{Diện tích cần tìm } S = \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx$$

Đặt $x-1 = \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t$; Với $x=0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$; $x=2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Câu IV: Kẻ $SH \perp BC$. Suy ra $SH \perp (ABC)$. Kẻ $SI \perp AB$; $SJ \perp AC$.

$\Rightarrow \widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 60^\circ \Rightarrow \triangle SIH = \triangle SJH \Rightarrow HI = HJ \Rightarrow AIHJ$ là hình vuông

$\Rightarrow I$ là trung điểm $AB \Rightarrow IH = a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SHI ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

Câu V: Sử dụng BĐT: $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Ta có: $\frac{ab}{a+3b+2c} = ab \cdot \frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq ab \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right)$

Tương tự đối với 2 biểu thức còn lại. Sau đó cộng vế với vế ta được:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a+b+c}{2} + \frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ca+ab}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} \right) = \frac{a+b+c}{6}$$

Câu VI.a: 1) Đường thẳng (Δ) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-2t \\ z = 2+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1; 3; 2)$

Giả sử $N(-1+3t; 2-2t; 2+2t) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3t-3; -2t; 2t-2)$

Để $MN \parallel (P)$ thì $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t = 7 \Rightarrow N(20; -12; 16)$

Phương trình đường thẳng cần tìm: $\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}$

2) Phương trình $AB: x + 2y - 1 = 0; AB = \sqrt{5}$.

Gọi h_c là đường cao hạ từ C của ΔABC . $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_c = 6 \Rightarrow h_c = \frac{12}{\sqrt{5}}$

Giả sử $C(2a+1; a) \in (\Delta)$. Vì $h_c = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{|2a+1+2a-1|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = \pm 3$

Vậy có hai điểm cần tìm: $C_1(7; 3)$ và $C_2(-5; -3)$

Câu VII.a: Từ giả thiết suy ra:

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow b+c+(2+b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Câu VI.b: 1) I có hoành độ $x_I = \frac{9}{2}$ và $I \in (d): x-y-3=0 \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Gọi $M = d \cap Ox$ là trung điểm của cạnh AD , suy ra $M(3;0)$.

$$AB = 2IM = 2\sqrt{(x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{9}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \Leftrightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} AD \perp (d) \\ M \in AD \end{cases}, \text{ suy ra phương trình } AD: 1 \cdot (x-3) + 1 \cdot (y-0) = 0 \Leftrightarrow x+y-3=0.$$

Lại có $MA = MD = \sqrt{2}$.

Vậy tọa độ A, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x+3 \\ (x-3)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-x \\ x-3 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy $A(2;1), D(4;-1)$,

$$I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ là trung điểm của } AC, \text{ suy ra: } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 9-2=7 \\ y_C = 2y_I - y_A = 3-1=2 \end{cases}$$

Tương tự I cũng là trung điểm BD nên ta có: $B(5;4)$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là $(2;1), (5;4), (7;2), (4;-1)$.

2) Mặt cầu (S) tâm $I(2;-1;3)$ và có bán kính $R = 3$.

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến mặt phẳng } (P): d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 3 + 16|}{3} = 5 \Rightarrow d > R.$$

Do đó (P) và (S) không có điểm chung. Do vậy, min $MN = d - R = 5 - 3 = 2$.

Trong trường hợp này, M ở vị trí M_0 và N ở vị trí N_0 . Để thấy N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và M_0 là giao điểm của đoạn thẳng IN_0 với mặt cầu (S) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) , thì N_0 là giao điểm của Δ và (P) .

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{n}_P = (2; 2; -1)$ và qua I nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Tọa độ của N_0 ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$2(2+2t) + 2(-1+2t) - (3-t) + 16 = 0 \Leftrightarrow 9t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

Suy ra $N_0\left(-\frac{4}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{14}{3}\right)$. Ta có $\overline{IM_0} = \frac{3}{5} \overline{IN_0}$. Suy ra $M_0(0; -3; 4)$

Câu VII.b: Ta có: $\frac{(1+i)^{2009}}{(1-i)^{2008}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} \cdot (1+i) = i^{2008}(1+i) = 1+i$

$$PT \Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z + (i+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (z-i-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i+1.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 23

Câu I: 2) • $\begin{cases} m < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ m > \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$: PT có 1 nghiệm duy nhất

• $m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ hoặc $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$: PT có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép)

• $m \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \setminus \left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$: PT có 3 nghiệm phân biệt

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} [\cos x + (1 - \cos x) \sin x] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

2) PT $\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{2x} - \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{3x} - 3(\sqrt{2}+1)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = 2$

Câu III: I $= \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - (e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1)}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx$

$$= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} - 1 \right) dx = \ln(e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1) \Big|_0^{\ln 2} - x \Big|_0^{\ln 2} = \ln 11 - \ln 4 = \ln \frac{11}{4}$$

Vậy $e^I = \frac{11}{4}$.

Câu IV: Ta có $S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ADC} = \frac{1}{2}a^2$. $V_{ASBC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6}a^3$

Câu V: $P = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{A+B}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \left(\frac{B+C}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}$

$$= 2 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \geq 2\sqrt{3}. \text{ Vậy } \min P = 2\sqrt{3} \text{ khi và chỉ khi } A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Câu VI.a: 1) (C) có tâm I(0;2), bán kính R = 3. Gọi I' là điểm đối xứng của I qua M

$$\Rightarrow I' \left(\frac{8}{5}; \frac{-6}{5} \right) \Rightarrow (C'): \left(x - \frac{8}{5} \right)^2 + \left(y + \frac{6}{5} \right)^2 = 9$$

2) Gọi (P) là mặt phẳng qua I và $\Delta_1 \Rightarrow (P): 3x - y + 2z + 2 = 0$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua I và $\Delta_2 \Rightarrow (Q): 3x - y - 2z + 2 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình của (d) = (P) $\cap$ (Q)

Câu VII.a: Ta có D = $[-3; -2] \cup [2; 3]$

• $y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \notin D$

• $y(-3) = -18, y(-2) = -2, y(2) = 2, y(3) = 18 \Rightarrow$ kết quả.

Câu VI.b: 1) Đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi A, B là hai tiếp điểm. Nếu hai tiếp tuyến này lập với nhau một góc 60° thì IAM là nửa tam giác đều suy ra $IM = 2R = 2\sqrt{5}$.

Như thế điểm M nằm trên đường tròn (T) có phương trình: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Mặt khác, điểm M nằm trên đường thẳng Δ , nên tọa độ của M nghiệm đúng hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 & (1) \\ x+2y-12=0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Khử } x \text{ giữa (1) và (2) ta được: } (-2y+10)^2 + (y-1)^2 = 20 \Leftrightarrow 5y^2 - 42y + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=\frac{27}{5} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là: $M(6;3)$ hoặc $M\left(\frac{6}{5}; \frac{27}{5}\right)$

$$2) \text{ Phương trình tham số của } \Delta: \begin{cases} x=7+t' \\ y=3+2t' \\ z=9-t' \end{cases}$$

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường vuông góc chung với Δ_1 và Δ_2

$$\Rightarrow M(7+t'; 3+2t'; 9-t') \text{ và } N(3-7t; 1+2t; 1+3t)$$

VTCP lần lượt của Δ_1 và Δ_2 là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{b} = (-7; 2; 3)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{MN} \perp \vec{a} \\ \overline{MN} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overline{MN} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}. \text{ Từ đây tìm được } t \text{ và } t' \Rightarrow \text{Toạ độ của M, N.}$$

Đường vuông góc chung chính là đường thẳng MN.

Câu VII.b: Gọi nghiệm thuần ảo là $z = ki$ ($k \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có: } (ki)^3 + (1-2i)(ki)^2 + (1-i)ki - 2i = 0 \Leftrightarrow -k^3i - k^2 + 2k^2i + ki + k - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-k^2 + k) + (-k^3 + 2k + k - 2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -k^2 + k = 0 \\ -k^3 + 2k^2 + k - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Vậy nghiệm thuần ảo là $z = i$

$$\Rightarrow z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z-i)[z^2 + (1-i)z + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ z^2 + (1-i)z + 2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 24

Câu I: 2) $y' = g(x) = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$.

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(1) = -5m + 7 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(m < -1 \vee \frac{5}{4} < m < 5 \right)$$

Câu II: 1) • Nếu $\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, phương trình vô nghiệm.

• Nếu $\cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, nhân hai vế phương trình cho $2\cos \frac{x}{2}$ ta được:

$$2\cos \frac{x}{2} \cos 3x - 2\cos \frac{x}{2} \cos 2x + 2\cos \frac{x}{2} \cos x = \cos \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{tích thành tổng}} \cos \frac{7x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k \frac{2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}, \text{ đối chiếu điều kiện: } k \neq 3 + 7m, m \in \mathbb{Z}.$$

2) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Đặt: $y = \frac{\log_x 3}{\log_x 2} \Rightarrow y = \log_2 3 > 0$.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{3 \frac{\log_x 3}{\log_x 2} + 2}{\frac{\log_x 3}{\log_x 2} + 1} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3y + 2}{y + 1} \geq 3 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{y + 1} \geq 3 (*) \text{ luôn sai với mọi } y > 0.$$

Kết luận: BPT vô nghiệm.

Câu III: Đặt: $t = \sqrt{4x + 1} \Rightarrow t^2 = 4x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}(t^2 - 1)$

$$\text{Do đó: } I = \int_2^6 \frac{dx}{2x + 1 + \sqrt{4x + 1}} = \int_3^5 \frac{tdt}{(t + 1)^2} = \int_3^5 \left[\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{(t + 1)^2} \right] dt = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

Câu IV: Nhận xét: Tâm O của lục giác đều ABCDEF là trung điểm của các đường chéo AD, BE, CF. $SO \perp (ABCDEF)$. Các tam giác OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA là các tam giác đều bằng nhau cạnh b.

$$\text{Diện tích đáy: } S_{\text{đáy}} = 6S_{\Delta OAB} = 6b^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}b^2}{2} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Chiều cao } h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích } V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} h = \frac{b^2 \sqrt{3(a^2 - b^2)}}{2}$$

* Xác định được $d(SA, BE) = d(O, (SAF)) = OJ$. Chứng minh $OJ \perp (SAF)$

$$\text{Trong } \Delta SOJ \text{ vuông tại O ta có } OJ = \frac{OI \cdot SO}{\sqrt{OI^2 + SO^2}} = b \sqrt{\frac{3(a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2}}$$

Câu V: Đặt $A = x^2 + xy + y^2, B = x^2 - xy - 3y^2$

• Nếu $y = 0$ thì $A = B = x^2 \Rightarrow 0 \leq B \leq 3$.

• Nếu $y \neq 0$, ta đặt $z = \frac{x}{y}$ khi đó: $B = A \cdot \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = A \cdot \frac{z^2 - z - 3}{z^2 + z + 1}$.

$$\text{Xét phương trình: } \frac{z^2 - z - 3}{z^2 + z + 1} = m \Leftrightarrow (m - 1)z^2 + (m + 1)z + m + 3 = 0 \quad (a).$$

$$(a) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ (m + 1)^2 - 4(m - 1)(m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{48}}{3} \leq m \leq \frac{-3 + \sqrt{48}}{3}$$

Vì $0 \leq A \leq 3 \Rightarrow -3 - 4\sqrt{3} \leq B \leq -3 + 4\sqrt{3}$. Đây là điều phải chứng minh.

Câu VI.a: 1) Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4)$$

$$\text{Tọa độ của B nghiệm đúng hệ phương trình } \begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0)$$

Đường thẳng AC đi qua điểm A(-2;4) nên phương trình có dạng:

$$a(x + 2) + b(y - 4) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 2a - 4b = 0$$

$$\text{Gọi } \Delta_1: 4x + 3y - 4 = 0; \Delta_2: x + 2y - 6 = 0; \Delta_3: ax + by + 2a - 4b = 0$$

Từ giả thiết suy ra $(\Delta_2; \Delta_3) = (\Delta_1; \Delta_2)$. Do đó

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{A_2; A_3}) &= \cos(\widehat{A_1; A_2}) \Leftrightarrow \frac{|1.a + 2.b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4.1 + 2.3|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow |a + 2b| &= 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

• $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$. Do đó $\Delta_3: y - 4 = 0$

• $3a - 4b = 0$: Chọn $a = 4$ thì $b = 3$. Suy ra $\Delta_3: 4x + 3y - 4 = 0$ (trùng với Δ_1).

Do vậy, phương trình của đường thẳng AC là $y - 4 = 0$.

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(5; 4)$

2) Tọa độ của trung điểm I của AB là: $I(2; 2; 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng KI: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $(\alpha) \Rightarrow H(-1; 0; 1)$.

Giả sử $K(x_k; y_k; z_k)$, khi đó: $KH = \sqrt{(x_k + 1)^2 + y_k^2 + (z_k - 1)^2}$ và $KO = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$

Từ yêu cầu bài toán ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{(x_k + 1)^2 + y_k^2 + (z_k - 1)^2} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ \frac{x_k - 2}{3} = \frac{y_k - 2}{2} = \frac{z_k}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = -\frac{1}{4} \\ y_k = \frac{1}{2} \\ z_k = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ . Kết luận: } K\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

Câu VII.a: Ta có: $3(1+i)^{2010} = 4i(1+i)^{2008} - 4(1+i)^{2006} \Leftrightarrow 3(1+i)^4 = 4i(1+i)^2 - 4 \Leftrightarrow (1+i)^4 = -4$
 $\Leftrightarrow 4i^2 = -4$ (đúng) $\Rightarrow$ (đpcm).

Câu VI.b: 1) Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0; x = 2 \\ y = -1; x = -3 \end{cases}$$

Vì A có hoành độ dương nên ta được $A(2; 0)$, $B(-3; -1)$.

Vì $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên AC là đường kính đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I của đường tròn. Tâm $I(-1; 2)$, suy ra $C(-4; 4)$.

2) Vì $A \in \Delta_1 \Rightarrow A(t+1; -t-1; 2)$; $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(t'+3; 2t'+1; t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-t'-t+2; 2t'+t+2; t'-2)$

Vì đoạn AB có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của (Δ_1) và (Δ_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3t' = 0 \\ 3t + 6t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0 \Rightarrow A(1; -1; 2), B(3; 1; 0).$$

Câu VII.b: Nhận xét: Số chia hết cho 15 thì chia hết 3 và chia hết 5.

• Các bộ số gồm 5 số có tổng chia hết cho 3 là: $(0; 1; 2; 3; 6)$, $(0; 1; 2; 4; 5)$, $(0; 1; 3; 5; 6)$, $(0; 2; 3; 4; 6)$, $(0; 3; 4; 5; 6)$, $(1; 2; 3; 4; 5)$, $(1; 2; 4; 5; 6)$.

• Mỗi số chia hết cho 5 khi và chỉ khi số tận cùng là 0 hoặc 5.

+ Trong các bộ số trên có 4 bộ số có đúng một trong hai số 0 hoặc 5 $\Rightarrow 4.P_4 = 96$ số chia hết cho 5.

+ Trong các bộ số trên có 3 bộ số có cả 0 và 5.

Nếu tận cùng là 0 thì có $P_4 = 24$ số chia hết cho 5.

Nếu tận cùng là 5 vì do số hàng chục nghìn không thể là số 0, nên có $3.P_3 = 18$ số chia hết cho 5.

Trong trường hợp này có: $3(P_4 + 3P_3) = 126$ số.

Vậy số các số theo yêu cầu bài toán là: $96 + 126 = 222$ số.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 25

Câu I: 2) Ta có :
$$\begin{cases} |x-3|^3 - 3x - k < 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \log_2 x^2 + \frac{1}{3} \log_2 (x-1)^3 \leq 1 & (2) \end{cases}$$
 . Điều kiện (2) có nghĩa: $x > 1$.

Từ (2) $\Leftrightarrow x(x-1) \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$.

Hệ PT có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thỏa $1 < x \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 3x - k < 0 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 3x < k \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Đặt: $f(x) = (x-1)^3 - 3x$ và $g(x) = k$ (d). Dựa vào đồ thị (C) $\Rightarrow$ (1) có nghiệm $x \in (1; 2] \Leftrightarrow k \geq \min_{x \in (1; 2]} f(x) = f(2) = -5$. Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow k > -5$

Câu II: 1) Ta có: $\sin x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [2; 40]$ nên $2 \leq \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \leq 40 \Rightarrow \frac{3}{2\pi} \left(2 - \frac{\pi}{6} \right) \leq k \leq \frac{3}{2\pi} \left(40 - \frac{\pi}{6} \right)$
 $\Rightarrow 0,7 \leq k \leq 18,8 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, \dots, 18\}$.

Gọi S là tổng các nghiệm thỏa YCBT: $S = 18 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (1 + 2 + 3 + \dots + 18) = 117\pi$.

2) Điều kiện: $1 < x < 3$. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x+1) + \log_2 (3-x) - \log_2 (x-1) = 0 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3-x) = x-1 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ (tmđk)}$$

Câu III: Ta có : $I = \int_1^e \left(x + \frac{2}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \dots = \frac{1}{4} [e^2 + 5]$.

Câu IV: Ta có: ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AC' = \frac{SC}{2} = a \Rightarrow \Delta SAC'$ đều

Vì (P) chứa AC' và (P) // BD $\Rightarrow B'D' // BD$. Gọi O là tâm hình thoi ABCD và I là giao điểm của AC' và $B'D' \Rightarrow I$ là trọng tâm của ΔSBD . Do đó: $B'D' = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3} a$.

Mặt khác, $BD \perp (SAC) \Rightarrow D'B' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp AC'$

$$\text{Do đó: } S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D' = \frac{a^2}{3}.$$

Đường cao h của khối chóp $S.AB'C'D'$ chính là đường cao của tam giác đều $SAC' \Rightarrow$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy thể tích của khối chóp } S.AB'C'D' \text{ là } V = \frac{1}{3} h \cdot S_{AB'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}.$$

Câu V: Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a}{c+a} \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + \frac{b}{a+b} \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + \frac{c}{b+c} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{c}{a} + 1} \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + \frac{1}{\frac{a}{b} + 1} \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + \frac{1}{\frac{b}{c} + 1} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0 \quad (1)$

Đặt: $x = \frac{a}{b} > 0; y = \frac{b}{c} > 0; z = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 1$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + xy^2 + yz^2 + zx^2 - x - y - z \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq \sqrt[3]{xyz}(x+y+z) = x+y+z \quad (\text{theo BĐT Cô-si})$$

Và $xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^3} = 3$ (theo BĐT Cô-si). Do đó: (*) đúng. Vậy (1) được CM.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$. Khi đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu VI.a: 1) Giả sử AB: $5x - 2y + 6 = 0$; AC: $4x + 7y - 21 = 0$. Vậy A(0;3)

Đường cao đỉnh B đi qua O nhận VTCP $\vec{a} = (7; -4)$ của AC làm VTPT

$$\Rightarrow BO: 7x - 4y = 0 \Rightarrow B(-4; -7)$$

A nằm trên Oy $\Rightarrow$ đường cao AO chính là trục Oy. Vậy AC: $y + 7 = 0$

$$2) \text{ Ta có } I(a;0;0), J(0;b;0), K(0;0;c) \Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\vec{IA} = (4-a; 5; 6), \quad \vec{JA} = (4; 5-b; 6); \quad \vec{JK} = (0; -b; c), \quad \vec{IK} = (-a; 0; c)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{5}{b} + \frac{6}{c} = 1 \\ -5b + 6c = 0 \\ -4a + 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{77}{4} \\ b = \frac{77}{5} \\ c = \frac{77}{6} \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình mp(P)}$$

Câu VII.a: Xét nhị thức Newton: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

$$\text{Lấy đạo hàm đến cấp hai hai vế ta được: } n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2} \quad (1)$$

$$\text{Cho } x = 1 \text{ và } n = 25 \text{ từ (1)} \Rightarrow 25 \cdot 24 \cdot 2^{23} = \sum_{k=2}^{25} k(k-1)C_{25}^k \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{25} k(k-1)C_{25}^k = 5033164800.$$

Câu VI.b: 1) (C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 2. $M \in Oy \Rightarrow M(0;m)$

$$\text{Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A và B là hai tiếp điểm)} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AMB} = 60^\circ & (1) \\ \widehat{AMB} = 120^\circ & (2) \end{cases}$$

Vì MI là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 30^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow MI = 2R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$$

$$(2) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 60^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow MI = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy có hai điểm $M_1(0; \sqrt{7})$ và $M_2(0; -\sqrt{7})$

$$2) \vec{BA} = (4; 5; 5), \quad \vec{CD} = (3; -2; 0), \quad \vec{CA} = (4; 3; 6)$$

$$\text{Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và (P) } \perp (Oxy) \Rightarrow (P) \text{ có VTPT } \vec{n}_1 = [\vec{BA}, \vec{k}] = (5; -4; 0) \\ \Rightarrow (P): 5x - 4y = 0$$

$$(Q) \text{ là mặt phẳng qua CD và (Q) } \perp (Oxy) \Rightarrow (Q) \text{ có VTPT } \vec{n}_2 = [\vec{CD}, \vec{k}] = (-2; -3; 0) \\ \Rightarrow (Q): 2x + 3y - 6 = 0$$

Ta có (D) = (P) $\cap$ (Q) $\Rightarrow$ Phương trình của (D)

Câu VII.b: Giả sử $z = a + bi$ (a- phần thực, b- phần ảo)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |z| = 5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Kết luận: Có hai số phức thoả yêu cầu bài toán: $z = -2\sqrt{5} - \sqrt{5}i$; $z = 2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 26

Câu I: 2) Phương hoành độ giao điểm của (d) và (C) là: $\frac{x-2}{x-1} = -x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m - 2 = 0 \end{cases} \text{ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi } m$$

Ta có $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$

$$AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{2(m^2 - 4m + 8)} \geq \sqrt{8}$$

Vậy GTNN của $AB = \sqrt{8}$ khi và chỉ khi $m = 2$

Câu II: 1) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Đặt $t = \log_2 x$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-t^2 - t + 2}{2t} \geq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t(t^2 + t - 2) \leq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ 0 < t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq \log_2 2^{-2} \\ \log_2 1 < \log_2 x \leq \log_2 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

2) Điều kiện: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\text{PT} \Rightarrow \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \sin 3x = \sin x + \sin 2x \Rightarrow -\sin 3x = \sin x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện, nghiệm của phương trình là: } \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Câu III: Ta có: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\sin x = \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx}{\cos^3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Câu IV: Trên SB, SC lấy các điểm B', C' sao cho $SB' = SC' = a$. Ta có $AB' = a$, $B'C' = a\sqrt{2}$, $AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle AB'C'$ vuông tại B'. Gọi H là trung điểm của AC', thì $\triangle SHB'$ vuông tại H. Vậy SH là đường cao của hình chóp S.AB'C'

$$\text{Vậy: } V_{S.AB'C'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}. \quad \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \frac{abc}{a^3} = \frac{bc}{a^2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{12} abc$$

Câu V: Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\frac{8a^3}{(b+c)^2} + (b+c) + (b+c) \geq 6a \Leftrightarrow \frac{a^3}{(b+c)^2} \geq \frac{6a-2b-2c}{8}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2a = b + c$.

Tương tự: $\frac{b^3}{(c+a)^2} \geq \frac{6b-2c-2a}{8}$; $\frac{c^3}{(a+b)^2} \geq \frac{6c-2a-2b}{8}$

Suy ra: $P \geq \frac{a+b+c}{4} = \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$. Kết luận: $\min P = \frac{1}{4}$

Câu VI.a: 1) Giả sử: $A(a; -a-1)$, $B(b; 2b-1)$

Từ điều kiện $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ tìm được $A(1; -2)$, $B(1; 1)$ suy ra (d): $x - 1 = 0$

2) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (P) ta suy ra (Q): $8x + 7y + 11z - 46 = 0$.
0. (D) = (P) $\cap$ (Q) suy ra phương trình (D).

Câu VII.a: PT có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}(1-i)$, $x_2 = \frac{1}{2}(1+i) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = 2i$; $\frac{1}{x_2} = -2i$

Câu VI.b: 1) (H) có một tiêu điểm $F(\sqrt{13}; 0)$. Giả sử pttt (d): $ax + by + c = 0$. Khi đó: $9a^2 - 4b^2 = c^2$ (*)

Phương trình đường thẳng qua F vuông góc với (d) là (D): $b(x - \sqrt{13}) - ay = 0$

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} ax + by = -c \\ bx - ay = \sqrt{13}b \end{cases}$

Bình phương hai vế của từng phương trình rồi cộng lại và kết hợp với (*) ta được $x^2 + y^2 = 9$

2) Lập phương trình mp(ABC); (P) qua A và (P) $\perp$ BC; (Q) qua B và (Q) $\perp$ AC

Giải hệ gồm ba phương trình ba mặt phẳng trên ta được trục tâm $H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$

Câu VII.b: Ta có:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 2C_n^{k-2} = C_{n+3}^k - C_n^{k-3} - C_n^{k-2} \Leftrightarrow C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \quad (1)$$

$$VT(I) = C_n^k + C_n^{k-1} + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}$$

$$= (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) = C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 27

Câu I: 2) Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt cách đều nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $x^4 - (2m+1)x^2 + 2m = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow$ phương trình: $X^2 - (2m+1)X + 2m = 0$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $X_1 = 9X_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 8m > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6 \cos x + \sin x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 \\ 6 \cos x + \sin x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$

2) Xét (1): Đặt $t = x - y$. (1) $\Leftrightarrow 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t\right] = 1 + 9 \cdot 3^t$.

• Với $t > 0$ VT < 10, VP > 10. • Với $t < 0$, VT > 10, VP < 10.
 $\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 0$ hay $x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - 3x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0$.

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho $x = 0$ ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 3\sqrt{x - \frac{1}{x}} + 2 = 0. \text{ Đặt } y = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \text{ (ĐK } y \geq 0).$$

Ta được phương trình: $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Từ đó ta tìm được x .

Câu III: $S = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = xe^x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{xe^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx$

Câu IV: • Chứng minh: ΔACD vuông tại $C \Rightarrow \Delta ACD$ vuông cân tại C .

$$AC = CD = a\sqrt{2}; CD = 2a; BD = a\sqrt{5}$$

$$\bullet V_{SBCD} = V_{S.ABCD} - V_{SABD}.$$

• Chứng minh $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Kẻ $AK \perp (SC) \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow (AKH) \perp (SCD)$.

Kéo dài AB và CD cắt nhau tại E . Kéo dài AH cắt SE tại M .

Có $(AMK) \perp (SCD)$ hay $(AMK) \perp (SED)$.

$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK \Rightarrow$ tam giác AHK vuông tại H .

Kẻ $HI \perp MK$ có $HI = d(H, (SCD))$.

• Tính $AH, AM \Rightarrow HM$; Tính $AK \Rightarrow HK$. Từ đó tính được HI .

Câu V: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} \right) \text{ và } \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2009}{4}$$

$$\text{Vậy MaxP} = \frac{2009}{4} \text{ khi } x = y = z = \frac{12}{2009}$$

Câu VI.a: 1) C nằm trên mặt phẳng trung trực của AB .

2) Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0; x = 2 \\ y = -1; x = -3 \end{cases}$$

Vì A có hoành độ dương nên ta được $A(2;0), B(-3;-1)$.

Vì $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên AC là đường kính đường tròn, tức là điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I của đường tròn. Tâm $I(-1;2)$, suy ra $C(-4;4)$.

Câu VII.a: Phương trình: $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$ có nghiệm duy nhất $n = 19$. (Vì VT là hàm số đồng biến nên đồ thị cắt đường thẳng $y = 4$ tại một điểm duy nhất)

Câu VI.b: 1) Mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng là đường kính.

2) Ta có: $\overline{AB} = (-1;2) \Rightarrow AB = \sqrt{5}$. Phương trình của AB là: $2x + y - 2 = 0$.

$I \in (d): y = x \Rightarrow I(t; t)$. I là trung điểm của AC và BD nên: $C(2t-1; 2t), D(2t; 2t-2)$

Mặt khác: $S_{ABCD} = AB \cdot CH = 4$ (CH: chiều cao) $\Rightarrow CH = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Ngoài ra: $d(C; AB) = CH \Leftrightarrow \frac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ t = 0 \Rightarrow C(-1; 0), D(0; -2) \end{cases}$

Vậy tọa độ của C và D là $C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1; 0), D(0; -2)$

Câu VII.b: Đặt $\log_3(n^2 - 2n + 6) = t \Rightarrow n^2 - 2n + 6 = 3^t; (n^2 - 2n + 6)^{\log_3 5} = (3^t)^{\log_3 5} = 5^t$.

Ta được phương trình: $3^t + 4^t = 5^t$. Phương trình có nghiệm duy nhất $t = 2$.

$\Rightarrow n^2 - 2n + 6 = 9 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = 3$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 28

Câu I: 2) $\log_{12} m = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = 12^{\frac{9}{4}} = 144\sqrt[4]{12}$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos x \cos 2x = 2\cos 2x$ và $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ (VN) $\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

2) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow t^2 - 2 = x^2 - 2x$. BPT $\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ ($1 \leq t \leq 2$), do $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Khảo sát hàm số: $g(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ với $1 \leq t \leq 2$. $g'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0 \Rightarrow g$ tăng trên $[1, 2]$

Do đó, YCBT $\Leftrightarrow$ BPT $m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ có nghiệm $t \in [1, 2] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [1; 2]} g(t) = g(2) = \frac{2}{3}$

Vậy: $m \leq \frac{2}{3}$

Câu III: Đặt $t = \sqrt{2x + 1} \Rightarrow I = \int_1^3 \frac{t^2}{1 + t} dt = \int_1^3 \left(t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t + 1| \right]_1^3 = 2 + \ln 2$

Câu IV: Chọn hệ trục Oxyz sao cho: $A \equiv O, C(-2a, 0, 0), A_1(0, 0, 2a\sqrt{5})$

$\Rightarrow A(0; 0; 0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), M(-2a, 0, a\sqrt{5}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = a\left(-\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5}\right), \overrightarrow{MA_1} = a(2; 0; \sqrt{5})$

Ta có thể tích khối tứ diện AA_1BM là:

$V_{AA_1BM} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AA_1} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]| = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}; S_{ABMA_1} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA_1}]| = 3a^2 \sqrt{3}$

Suy ra khoảng cách từ A đến mp (BMA_1) bằng $d = \frac{3V}{S} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu V: Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}; \frac{3}{2}(y + z) \geq 3\sqrt{xy}; \frac{5}{2}(z + x) \geq 5\sqrt{xy} \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu VI.a: 1) Vì khoảng cách đại số của A và B cùng dấu nên A, B ở cùng phía với (P)

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P); PT (AA') : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$

$$AA' \text{ cắt } (P) \text{ tại } H, \text{ tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ PT: } \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1, 2, -1)$$

$$\text{Vì } H \text{ là trung điểm của } AA' \text{ nên ta có: } \begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Rightarrow A'(3, 1, 0)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B} = (-6, 6, -18) \text{ (cùng phương với } (1; -1; 3)) \Rightarrow \text{PT } (A'B): \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

$$\text{Vậy tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2, 2, -3)$$

$$2) \quad x + 3y - 6 = 0; \quad x - y - 2 = 0$$

$$\text{Câu VII.a: PT} \Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x} = x(2 - x) \Leftrightarrow 3^{x(2-x)} = x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{Đặt: } f(x) = 3^{x(2-x)}, \quad g(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{Từ BBT} \Rightarrow \max f(x) = 3; \quad \min g(x) = 3$$

$$\Rightarrow \text{PT } f(x) = g(x) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \max f(x) = \min g(x) = 3 \text{ tại } x=1 \Rightarrow \text{PT có nghiệm } x=1$$

$$\text{Câu VI.b: 1) Gọi } P \text{ là chu vi của tam giác MAB thì } P = AB + AM + BM.$$

$$\text{Vì } AB \text{ không đổi nên } P \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } AM + BM \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có PTTS: } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}. \text{ Điểm } M \in \Delta \text{ nên } M(-1 + 2t; 1 - t; 2t).$$

$$AM = \sqrt{(-2 + 2t)^2 + (-4 - t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$BM = \sqrt{(-4 + 2t)^2 + (-2 - t)^2 + (-6 + 2t)^2} = \sqrt{(3t - 6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t - 6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$\text{Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ } \vec{u} = (3t; 2\sqrt{5}) \text{ và } \vec{v} = (-3t + 6; 2\sqrt{5}).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3t - 6)^2 + (2\sqrt{5})^2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ và } \vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$$

$$\text{Mặt khác, với hai vectơ } \vec{u}, \vec{v} \text{ ta luôn có } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|. \text{ Như vậy } AM + BM \geq 2\sqrt{29}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \frac{3t}{-3t + 6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow M(1; 0; 2) \text{ và } \min(AM + BM) = 2\sqrt{29}.$$

$$\text{Vậy khi } M(1; 0; 2) \text{ thì } \min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$$

$$2) \quad x + 2y - 6 = 0$$

$$\text{Câu VII.b: Điều kiện } x > 0, x \neq 1$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2\log_4 x \right) \frac{1}{2} \log_2 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^{\log_2 x}} + \log_2 x \right) (\log_2 x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3) \left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 29

Câu I: 2) Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases} \quad (m < 0)$

Gọi $A(0; m^2+m)$; $B(\sqrt{-m}; m)$; $C(-\sqrt{-m}; m)$ là các điểm cực trị.

$\overline{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overline{AC} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$. ΔABC cân tại A nên góc 120° chính là $\hat{A}$.

$$\hat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m} \cdot \sqrt{-m} + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + m^4}{m^4 - m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m + 2m^4 = m - m^4 \Leftrightarrow 3m^4 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{loại}) \\ m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa mãn bài toán.

Câu II: 1) Điều kiện $x \geq 1$.

Nhân hai vế của bpt với $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$, ta được

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 4(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$$

$$x^2 + 2x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 2x + 2 + 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$ ta được $x \geq 2$.

2) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có PT} \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} (\cos x + \sin x)^2 = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \\ x = m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

Câu III: Nhận xét: $y = \frac{x}{1 + \sin x} \geq 0, \forall x \in [0, \pi]$. Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx = \int_0^\pi \frac{x}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{x}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \int_0^\pi x d\left(\tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = x \cdot \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \int_0^\pi \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx = \pi + 2 \ln \left| \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right|_0^\pi \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } S = \pi + 2 \left(\ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \ln \left| \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| \right) = \pi \quad (\text{đvdt})$$

Câu IV: Ta có $AO = OC = a\sqrt{2} \Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra } V = B \cdot h = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}$$

Tính góc giữa AM và A'C. Gọi N là trung điểm AD, suy ra AM // CN.

Xét $\Delta A'CN$ ta có:

$$A'C = \sqrt{A'O^2 + OC^2} = 2a; CN = AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = a\sqrt{5}; A'N = \sqrt{AA'^2 + AN^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{CA'^2 + CN^2 - A'N^2}{2.CA'.CN} = \frac{4a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2.2a.a\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} > 0$$

Vậy cosin của góc giữa AM và A'C bằng $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Câu V: Đặt $t = \sin x$ với $t \in [-1, 1]$ ta có $A = |5t^3 - 9t^2 + 4|$.

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 - 9t^2 + 4$ với $t \in [-1, 1]$. Ta có $f'(t) = 15t^2 - 18t = 3t(5t - 6)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{6}{5}$ (loại); $f(-1) = -10, f(1) = 0, f(0) = 4$. Vậy $-10 \leq f(t) \leq 4$.

Suy ra $0 \leq A = |f(t)| \leq 10$.

Vậy GTLN của A là 10 đạt được khi $t = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

và GTNN của A là 0 đạt được khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu VI.a: 1) Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 1$. Mặt khác $S_{IAB} = \frac{1}{2} .IH.IB$ với $AB = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow IH = 2$.

Gọi $I(x_I, x_I)$ vì I thuộc đường thẳng $y=x$, ta có phương trình (AB) là $y = 0$;

$$IH = 2 \Leftrightarrow d(I; AB) = 2 \Leftrightarrow |x_I| = 2$$

TH1: $x_I = 2 \Rightarrow I(2; 2); C(3; 4); D(2; 4)$.

TH2: $x_I = -2 \Rightarrow I(-2; -2); C(-5; -4); D(-6; -4)$.

2) Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Ta có: $V_{OABC} = V_{IOAB} + V_{IOBC} + V_{IOCA} + V_{IABC} = \frac{1}{3} .r.S_{OAB} + \frac{1}{3} .r.S_{OBC} + \frac{1}{3} .r.S_{OCA} + \frac{1}{3} .r.S_{ABC} = \frac{1}{3} .r.S_{TP}$.

Mặt khác: $V_{OABC} = \frac{1}{6} .OA.OB.OC = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (đvdt); $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA} = \frac{1}{2} .OA.OB = 2$ (đvdt)

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} .8 = 2\sqrt{3} \text{ (đvdt)} \Rightarrow S_{TP} = 6 + 2\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Do đó: } r = \frac{3V_{OABC}}{S_{TP}} = \frac{4}{6 + 2\sqrt{3}} \text{ (đv độ dài)}$$

Câu VII.a: Ta có $(1+x)^{30} = (1+x)^{10} . (1+x)^{20}, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$\text{Mặt khác: } (1+x)^{30} = \sum_{k=1}^n C_{30}^k .x^k, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hệ số a_{10} của x^{10} trong khai triển của $(1+x)^{30}$ là $a_{10} = C_{30}^{10}$.

Do (1) đúng với mọi x nên $a_{10} = b_{10}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu VI.b: 1) (C) có tâm I(1;2) và $R = \sqrt{10}$. Suy ra $\overrightarrow{AI} = 2.\overrightarrow{IH} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2(X_H - 1) \\ 3 = 2(Y_H - 2) \end{cases} \Leftrightarrow H \left(\frac{3}{2}; 2 \right)$

Gọi H là trung điểm BC, ta có I là trọng tâm tam giác ABC vì $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Phương trình (BC) đi qua H và vuông góc với AI là: $1.\left(x - \frac{3}{2}\right) + 3.\left(y - \frac{7}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 3y - 12 = 0$$

Vì B, C $\in$ (C) nên tọa độ của B, C lần lượt là các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x = 12 - 3y \end{cases}$$

Giải hệ PT trên ta được: $B \left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3\sqrt{3}}{2} \right); C \left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \right)$ hoặc ngược lại.

2) PTTS của d_1 là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$
 $M \in d_1$ nên tọa độ của M $(1 + 2t; 3 - 3t; 2t)$.

Theo đề: $d(M; (P)) = \frac{|1 + 2t - 2(3 - 3t) + 4t - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|12t - 6|}{3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$

+ Với $t = 1$ ta được $M_1(3; 0; 2)$; + Với $t = 0$ ta được $M_2(1; 3; 0)$

• Ứng với M_1 , điểm $N_1 \in d_2$ cần tìm phải là giao của d_2 với mp qua M_1 và $// (P)$, gọi mp này là (Q_1) . PT (Q_1) là: $(x - 3) - 2y + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z - 7 = 0$ (1).

PTTS của d_2 là:
$$\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 4t \\ z = -5 - 5t \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $t = -1$. Điểm N_1 cần tìm là $N_1(-1; -4; 0)$.

• Ứng với M_2 , tương tự tìm được $N_2(5; 0; -5)$.

Câu VII.b: Điều kiện: $\begin{cases} x \geq y + 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 30

Câu I: 2) Tácó $y' = 3x^2 - 3mx = 3x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

Với $m \neq 0$ thì y' đổi dấu khi đi qua các nghiệm do vậy hàm số có CĐ, CT.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị là: $A\left(0; \frac{1}{2}m^3\right)$, $B(m; 0)$.

Điểm A và B đối xứng với nhau qua đường phân giác $y = x$, điều kiện cần và đủ là $\overline{OA} = \overline{OB}$ tức là: $m = \frac{1}{2}m^3 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$

Câu II: 1) ĐK: $x \neq \frac{\pi}{2} = k\pi$. PT $\Leftrightarrow \tan^2 x(1 - \sin^3 x) - (1 - \cos^3 x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow x = k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k2\pi$

2) PT $\Leftrightarrow \frac{5}{3}3^{2x} - \frac{7}{3}3^x + \sqrt{(3 \cdot 3^x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 1} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 5 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \log_3 5$

Câu III: Đặt $t = x^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \dots = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{24}$

Câu IV: Hình chiếu của SB và SC trên (ABC) là AB và AC, mà SB = SC nên AB = AC.

Ta có: $BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos 120^\circ \Leftrightarrow a^2 = 3AB^2 \Leftrightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$SA^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \frac{a^2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$

Câu V: Ta chứng minh: $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}$ (1)

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Tương tự: $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3}$ (2), $\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}$ (3)

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3) ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Vậy: $S \leq 3 \Rightarrow \max S = 3$ khi $a = b = c = 1$

Câu VI.a: 1) PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng: $Ax + By + Cz = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Vì (P) $\perp$ (Q) nên $1.A + 1.B + 1.C = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0 \Leftrightarrow C = -A - B$ (1)

Theo đề: $d(M; (P)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2 = 2(A^2+B^2+C^2)$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $8AB + 5B^2 = 0 \Leftrightarrow B = 0$ hay $B = -\frac{8A}{5}$

• $B = 0 \xrightarrow{(1)} C = -A$. Chọn $A = 1, C = -1$ thì (P): $x - z = 0$

• $B = -\frac{8A}{5}$. Chọn $A = 5, B = -8 \xrightarrow{(1)} C = 3$ thì (P): $5x - 8y + 3z = 0$

2) Gọi N là điểm đối xứng của M qua $(d_1) \Rightarrow N \in AC$. $\overrightarrow{MN} = (x_N - 1, y_N + 1)$

Ta có: $\overrightarrow{MN} // \vec{n}_{d_1} = (1; 1) \Leftrightarrow 1(x_N - 1) - 1(y_N + 1) = 0 \Leftrightarrow x_N - y_N = 2$ (1)

Tọa độ trung điểm I của MN: $x_I = \frac{1}{2}(1 - x_N), y_I = \frac{1}{2}(-1 + y_N)$

$I \in (d_1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - x_N) + \frac{1}{2}(-1 + y_N) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_N + y_N + 4 = 0$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được $N(-1; -3)$

Phương trình cạnh AC vuông góc với (d_2) có dạng: $x + 2y + C = 0$.

$N \in (AC) \Leftrightarrow 1 + 2(-3) + C = 0 \Leftrightarrow C = 7$. Vậy, phương trình cạnh AC: $x + 2y + 7 = 0$.

Câu VII.a: • 3 HS nữ được xếp cách nhau 1 ô. Vậy 3 HS nữ có thể xếp vào các vị trí là:

$$(1;3;5); (2;4;6); (3;5;7); (4;6;8); (5;7;9)$$

• Mỗi bộ 3 vị trí có 3! cách xếp 3 HS nữ.

• Mỗi cách xếp 3 HS nữ trong 1 bộ, có 6! cách xếp 6 HS nam vào 6 vị trí còn lại

Vậy có tất cả là: $5.3!.6! = 21600$ (cách) theo YCBT.

Câu VI.b: 1) Chọn $A(2;3;-3), B(6;5;-2) \in (d)$, mà $A, B \in (P)$ nên $(d) \subset (P)$.

Gọi $\vec{u}$ là VTCP của $(d_1) \subset (P)$, qua A và vuông góc với (d) thì $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u} \perp \vec{u}_p \end{cases}$

nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_d, \vec{u}_p] = (3; -9; 6)$.

Phương trình của đường thẳng (d_1) : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 9t \\ z = -3 + 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Lấy M trên (d_1) thì $M(2+3t; 3-9t; -3+6t)$. (Δ) là đường thẳng qua M và song song với (d).

Theo đề: $AM = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{9t^2 + 81t^2 + 36t^2} = \sqrt{14} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$

• $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M(1;6;-5) \Rightarrow (A_1): \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{1}$

• $t = \frac{1}{3} \Rightarrow M(3;0;-1) \Rightarrow (A_2): \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

2) Gọi $M(x_0; y_0), N(x_1; y_1)$ là hai điểm thuộc (P), khi đó ta có: $x_0 = y_0^2; x_1 = y_1^2$

$$\overrightarrow{IM} = (x_0; y_0 - 2) = (y_0^2; y_0 - 2); \overrightarrow{IN} = (y_1; y_1 - 2) = (y_1^2; y_1 - 2); 4\overrightarrow{IN} = (4y_1^2; 4y_1 - 8)$$

Theo giả thiết: $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$, suy ra:
$$\begin{cases} y_0^2 = 4y_1^2 \\ y_0 - 2 = 4y_1 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; y_0 = -2; x_0 = 4 \\ y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 9; y_0 = 6; x_0 = 36 \end{cases}$$

Vậy, có 2 cặp điểm cần tìm: M(4; -2), N(1; 1) hay M(36; 6), N(9; 3).

Câu VII.b: Đặt $t = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{-5+6x-x^2}$

$$PT \Leftrightarrow t + \frac{t^2 - 4}{2} = m \quad (t \in [2; 2\sqrt{2}])$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \frac{t^2 - 4}{2} \quad (t \in [2; 2\sqrt{2}]) \Rightarrow f'(t) = t + 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \notin [2; 2\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f(t) = m \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2(1 + \sqrt{2}).$$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 31

Câu I: 2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = 1$ là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(C_m) cắt đường thẳng $y = 1$ tại C(0, 1), D, E phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm $x_D, x_E \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ 0^2 + 3 \cdot 0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{4} \end{cases}$$

Lúc đó tiếp tuyến tại D, E có hệ số góc lần lượt là:

$$k_D = y'(x_D) = 3x_D^2 + 6x_D + m = -(x_D + 2m); \quad k_E = y'(x_E) = 3x_E^2 + 6x_E + m = -(x_E + 2m).$$

Các tiếp tuyến tại D, E vuông góc $\Leftrightarrow k_D k_E = -1$.

$$\Leftrightarrow (3x_D + 2m)(3x_E + 2m) = 9x_D x_E + 6m(x_D + x_E) + 4m^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9m - 18m + 4m^2 = -1; \text{ (vì } x_D + x_E = -3; x_D x_E = m \text{ theo định lý Vi-et).}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{8}(9 \pm \sqrt{65}).$$

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 3x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

2) Điều kiện: $x \geq 2$ và $y \geq 2$: Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được:

$$\sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{y-2} - \sqrt{x-2} + y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} = \frac{y - x}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + (y - x)(y + x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + x + y \right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (trong ngoặc luôn dương và x và y đều lớn hơn 2)

$$\text{Vậy từ hệ trên ta có: } \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} = \frac{x - 3}{\sqrt{x-2} + 1} + (x - 3)(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3) \left((x + 3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy nghiệm của hệ $x = y = 3$

Câu III: $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln x)} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x (1 + \ln x)} = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{1 + \ln x} \right) d(\ln x) = 2\ln 2 - \ln 3$

Câu IV: Dựng $SH \perp AB$. Ta có: $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$, $SH \subset (SAB)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$ và SH là đường cao của hình chóp.

Dựng $HN \perp BC$, $HP \perp AC \Rightarrow SN \perp BC$, $SP \perp AC \Rightarrow \widehat{SPH} = \widehat{SNH} = \alpha$

$\Delta SHN = \Delta SHP \Rightarrow HN = HP$.

ΔAHP vuông có: $HP = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. ΔSHP vuông có: $SH = HP \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tan \alpha$

Thể tích hình chóp $S.ABC$: $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \tan \alpha \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16} \tan \alpha$

Câu V: Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ($x > 0, y > 0$)

Ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c}$; $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a+b+2c}$; $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{2a+b+c}$

Mặt khác:

$$\frac{1}{2a+b+c} \geq \frac{2}{2a^2+b^2+c^2+4} = \frac{2}{a^2+7} \Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2+4-4a-2b-2c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

Tương tự: $\frac{1}{2b+c+a} \geq \frac{2}{b^2+7}$; $\frac{1}{2c+a+b} \geq \frac{2}{c^2+7}$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu VI.a: 1) Gọi (d) là đường thẳng qua $M(1; 1)$ cắt (E) tại C, D.

Vì (E) có tính đối xứng nên (d) không thể vuông góc với Ox, do đó phương trình của (d) có dạng: $y = k(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = kx + 1 - k$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (E): $4x^2 + 9(kx + 1 - k)^2 - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k)^2 - 36 = 0 \quad (1) \quad (\Delta' = 288k^2 + 72k + 108 > 0, \forall k)$$

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (E) tại 2 điểm C, D với các hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = \frac{-18k(1-k)}{4+9k^2}$

$$M(1; 1) \text{ là trung điểm của CD} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1-k)}{4+9k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $4x + 9y - 13 = 0$.

2) Gọi $A(a; 0; 0) \in Ox$. $\Leftrightarrow (Q') : 4y - 3x + 10 = 0$

(d) qua $M_0(1; 0; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 2)$. Đặt $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$

Do đó: $d(A; d)$ là chiều cao vẽ từ A trong tam giác AM_0M_1

$$\Rightarrow d(A; d) = \frac{2 \cdot S_{AM_0M_1}}{M_0M_1} = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3}$$

Theo giả thiết: $d(A; (P)) = d(A; d)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a|}{3} = \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3} \Leftrightarrow 4a^2 = 8a^2 - 24a + 36 \Leftrightarrow 4(a-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Vậy, có một điểm $A(3; 0; 0)$.

Câu VII.a: Giả sử $n = \overline{abcde}$.

• Xem các số hình thức $\overline{abcde}$, kể cả $a = 0$. Có 3 cách chọn vị trí cho 1 (1 là a hoặc b hoặc c). Sau đó chọn trị khác nhau cho 4 vị trí còn lại từ $X \setminus \{1\} \Rightarrow$ số cách chọn A_7^4 .

Như vậy có 3. (7. 6. 5. 4) = 2520 số hình thức thỏa yêu cầu đề bài.

- Xem các số hình thức $\overline{0bcde} \Rightarrow$ có $2A_6^3 = 240$ (số)
- Loại những số dạng hình thức $\overline{0bcde}$ ra, ta còn $2520 - 240 = 2280$ số n thỏa YCBT.

Câu VI.b: 1) Phương trình đường thẳng (AB): $x - 2y + 3 = 0$ và $AB = 2\sqrt{5}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow 5x_0^2 + 16y_0^2 = 80$. Ta có: $d(M; AB) = \frac{|x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔMAB : $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(M; AB) = |x_0 - 2y_0 - 3|$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia cốp Ski cho 2 cặp số $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{2}\right), (\sqrt{5}x_0; 4y_0)$ có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}x_0 - \frac{1}{2} \cdot 4y_0\right)^2 \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)(5x_0^2 + 16y_0^2) = \frac{9}{20} \cdot 80 = 36$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - 2y_0| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x_0 - 2y_0 \leq 6 \Leftrightarrow 3 - 6 \leq x_0 - 2y_0 + 3 \leq 6 + 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x_0 - 2y_0 + 3 \leq 9 \Rightarrow |x_0 - 2y_0 + 3| \leq 9$$

$$\Rightarrow \max |x_0 - 2y_0 + 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5}x}{1} = \frac{4y}{-2} \\ x_0 - 2y_0 + 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 = -8y_0 \\ x_0 - 2y_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 8 \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

Vậy, $\max S_{MAB} = 9$ khi $M\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

2) (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; 4; -1)$, (Q) có pháp vector $\vec{n}_q = (3; -4; 9)$

(d₁) có VTCP $\vec{u}_1 = (2; -4; 3)$, (d₂) có VTCP $\vec{u}_2 = (-2; 3; 4)$

Gọi: $\begin{cases} (\Delta) = (P) \cap (Q) \\ (P_1) \supset (d_1), (P_1) \parallel (P) \\ (Q_1) \supset (d_2), (Q_1) \parallel (Q) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) = (P_1) \cap (Q_1) \text{ và } (\Delta) \parallel (\Delta_1)$

(Δ) có vector chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{4}[\vec{n}_p; \vec{n}_q] = (8; -3; -4)$

(P₁) có cặp VTCP $\vec{u}_1$ và $\vec{u}$ nên có VTPT: $\vec{n}_{p_1} = [\vec{u}_1; \vec{u}] = (25; 32; 26)$

Phương trình mp (P₁): $25(x + 5) + 32(y - 3) + 26(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 25x + 32y + 26z + 55 = 0$

(Q₁) có cặp VTCP $\vec{u}_2$ và $\vec{u}$ nên có VTPT: $\vec{n}_{q_1} = [\vec{u}_2; \vec{u}] = (0; 24; -18)$

Phương trình mp (Q₁): $0(x - 3) + 24(y + 1) - 18(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 4y - 3z + 10 = 0$

Ta có: $(\Delta) = (P_1) \cap (Q_1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng (Δ): $\begin{cases} 25x + 32y + 26z + 55 = 0 \\ 4y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$

Câu VII.b: $n = 3, n = 4$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 32

Câu I: 2) Giao điểm I(1; -2). $A\left(a; \frac{2a-1}{1-a}\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại A: $y = \frac{1}{(1-a)^2}(x - a) + \frac{2a-1}{1-a}$

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến tại A: $P\left(1; \frac{2a}{1-a}\right)$

Giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến tại A: $Q(2a - 1; -2)$

Ta có: $x_P + x_Q = 2a = 2x_A$. Vậy A là trung điểm của PQ

Ta có $IP = \left| \frac{2a}{1-a} + 2 \right| = \frac{2}{|1-a|}$; $IQ = |2(a-1)|$. $S_{IPQ} = \frac{1}{2} IP \cdot IQ = 2$ (đvdt)

Câu II: 1) Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 10$

$$BPT \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{3x+1}+6}{2} \geq \log_2 (7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+1}+6}{2} \geq 7-\sqrt{10-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+1}+6 \geq 2(7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x} \geq 8 \Rightarrow 49x^2 - 418x + 369 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49} \text{ (thỏa)}$$

2) Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

$$PT \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin 2x \Rightarrow 3 \sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (không thỏa). Vậy phương trình vô nghiệm.}$$

Câu III: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2xe^{-x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = I_1 + I_2$

Tính: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2xe^{-x} dx$ Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow I_1 = -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} - 2e^{-\frac{\pi}{4}} + 2$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Câu IV: Gọi P là trung điểm của DD'. A'B'NP là hình bình hành $\Rightarrow A'P \parallel B'N$

A'PDM là hình bình hành $\Rightarrow A'P \parallel MD$

$\Rightarrow B'N \parallel MD$ hay B', M, N, D đồng phẳng.

Tứ giác B'NDM là hình bình hành. Để B'MND là hình vuông thì $2B'N^2 = B'D^2$.

$$\text{Đặt: } y = AA' \Rightarrow 2\left(\frac{y^2}{4} + a^2\right) = y^2 + a^2 \Rightarrow y = a\sqrt{2}$$

Câu V: Ta chứng minh: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+a)(1+b)(1+\sqrt{ab})} \geq 0 \text{ (đúng). Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

$$\text{Xét } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2}{1+\sqrt[6]{abc^4}} \geq \frac{4}{1+\sqrt[12]{a^4b^4c^4}} = \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}} = 1. \text{ Vậy } P \text{ nhỏ nhất bằng } 1 \text{ khi } a = b = c = 2$$

Câu VI.a: 1) PT đường thẳng (Δ) có dạng: $a(x-2) + b(y+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a + b = 0$

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 7a^2 - 8ab + b^2 = 0. \text{ Chọn } a = 1 \Rightarrow b = 1; b = 7.$$

$$\Rightarrow (\Delta_1): x + y - 1 = 0 \text{ và } (\Delta_2): x + 7y + 5 = 0$$

2) PT mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$(S) \text{ qua A: } 6a + 2b + 2c - d - 11 = 0$$

$$(S) \text{ qua B: } 2b + 8c - d - 17 = 0$$

(S) qua C: $2a + 6b - 2c + d + 11 = 0$

Tâm I $\in$ (P): $a + b - 2c + 4 = 0$

Giải ra ta được: $a = 1, b = -1, c = 2, d = -3$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$

Câu VII.a: Có 6 tập con có 5 chữ số chứa các số 0; 1; 2

Có 4 tập con có 5 chữ số chứa 1 và 2, nhưng không chứa số 0

Vậy số có các chữ số khác nhau được lập từ các chữ số đã cho bằng:

$$6(P_5 - P_4) + 4P_5 = 1.056 \text{ (số)}$$

Câu VI.b: 1) Tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực d của đoạn AB

d qua M(1; 2) có VTPT là $\overline{AB} = (4; 2) \Rightarrow d: 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow$ Tâm I(a; 4 - 2a)

$$\text{Ta có } IA = d(I, D) \Leftrightarrow |11a - 8| = 5\sqrt{5a^2 - 10a + 10} \Leftrightarrow 2a^2 - 37a + 93 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{31}{2} \end{cases}$$

• Với $a = 3 \Rightarrow I(3; -2), R = 5 \Rightarrow (C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

• Với $a = \frac{31}{2} \Rightarrow I\left(\frac{31}{2}; -27\right), R = \frac{65}{2} \Rightarrow (C): \left(x - \frac{31}{2}\right)^2 + (y + 27)^2 = \frac{4225}{4}$

2) Ta có $\overline{AB} = (-3; 1; 4); \vec{a} = \frac{1}{2}\overline{AC} = (-1; 1; 1)$

PT mặt phẳng (ABC): $3x + y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow D \notin (ABC) \Rightarrow$ đpcm

Câu VII.b: Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$ và $y > 0$ và $y \neq 1$

$$\text{Ta có } \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \Rightarrow \log_y^2 x + \log_y x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

• Với $x = y \Rightarrow x = y = \log_2 3 - 1$

• Với $x = \frac{1}{y^2}$ ta có: $2^{\frac{1}{y^2}} + 2^y = 3$ theo bất đẳng thức Cô-si suy ra PT vô nghiệm

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 33

Câu I: 2) Đạo hàm $y' = 4x^3 + 3mx^2 - 4x - 3m = (x - 1)[4x^2 + (4 + 3m)x + 3m]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x^2 + (4 + 3m)x + 3m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Hàm số có 2 cực tiểu $\Leftrightarrow y$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m - 4)^2 > 0 \\ 4 + 4 + 3m + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \pm \frac{4}{3}.$$

Thử lại: Với $m \neq \pm \frac{4}{3}$, thì $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 cực tiểu. Vậy, hàm số có 2 cực tiểu khi $m \neq \pm \frac{4}{3}$.

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$2) \text{ Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2}, u > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, v > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + 2 \\ v^2 = x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = 2x + 1 \\ x^2 = \frac{v^2 - u^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow (v-u) \left[(v-u) \left(1 + \frac{v+u}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v-u=0 \\ (v+u) \left(1 + \frac{v+u}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Vì $u > 0, v > 0$, nên (c) vô nghiệm.

$$\text{Do đó: } \text{PT} \Leftrightarrow v-u=0 \Leftrightarrow v=u \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Câu III: Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4} + 1.$

Câu IV: Gọi E là trung điểm của BC, H là trọng tâm của ΔABC . Vì $A'.ABC$ là hình chóp đều nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ là $\varphi = \widehat{A'EH}$.

$$\text{Ta có: } AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}, HE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \tan \varphi = \frac{A'H}{HE} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4}$$

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$

$$\text{Do đó: } V_{A'BB'CC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$$

Câu V: Áp dụng BĐT Cô-si, ta có:

$$\bullet \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 3\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} = 3 \quad (1)$$

$$\bullet \frac{a^2}{b^2} + 1 \geq 2\frac{a}{b}; \frac{b^2}{c^2} + 1 \geq 2\frac{b}{c}; \frac{c^2}{a^2} + 1 \geq 2\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu VI.a: 1) I (6; 2); M (1; 5)

$\Delta: x + y - 5 = 0, E \in \Delta \Rightarrow E(m; 5 - m)$; Gọi N là trung điểm của AB

$$I \text{ trung điểm } NE \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_E = 12 - m \\ y_N = 2y_I - y_E = 4 - 5 + m = m - 1 \end{cases} \Rightarrow N(12 - m; m - 1)$$

$$\overline{MN} = (11 - m; m - 6); \overline{IE} = (m - 6; 5 - m - 2) = (m - 6; 3 - m)$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{IE} = 0 \Leftrightarrow (11 - m)(m - 6) + (m - 6)(3 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 6 = 0 \text{ hay } 14 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 6 \text{ hay } m = 7$$

$$+ m = 6 \Rightarrow \overline{MN} = (5; 0) \Rightarrow \text{PT (AB) là } y = 5$$

$$+ m = 7 \Rightarrow \overline{MN} = (4; 1) \Rightarrow \text{PT (AB) là } x - 1 - 4(y - 5) = 0 \Rightarrow x - 4y + 19 = 0$$

$$2) I(1; 2; 3); R = \sqrt{1 + 4 + 9 + 11} = 5$$

$$d(I; (P)) = \frac{|2(1) - 2(2) - 3 - 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3 < R = 5. \text{ Vậy (P) cắt (S) theo đường tròn (C)}$$

$$\text{Phương trình d qua I, vuông góc với (P): } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Gọi J là tâm, r là bán kính đường tròn (C). $J \in d \Rightarrow J(1+2t; 2-2t; 3-t)$

$$J \in (P) \Rightarrow 2(1+2t) - 2(2-2t) - 3 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Vậy tâm đường tròn là J(3; 0; 2), bán kính $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = 4$

Câu VII.a: Đặt $t = 3^{x^2+x}$, $t > 0$. BPT $\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t \leq 1 \text{ hoặc } t \geq 9)$

$$\text{Khi } t \leq 1 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \quad (a)$$

$$\text{Khi } t \geq 9 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad (b)$$

Kết hợp (a) và (b) ta có tập nghiệm của bpt là: $S = (-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu VI.b: 1) (C) có tâm là I(-2; -2); $R = \sqrt{2}$

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Kẻ đường cao IH của ΔABC , ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \sin \widehat{AIB}$$

Do đó $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \Delta AIB$ vuông tại I

$$\Leftrightarrow IH = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \text{ (thỏa } IH < R) \Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = \frac{8}{15}$$

2) Theo giả thiết ta có $M(m; 0; 0) \in Ox$, $N(0; n; 0) \in Oy$, $P(0; 0; p) \in Oz$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{DP} = (1; -1; p-1); \overrightarrow{NM} = (m; -n; 0) \\ \overrightarrow{DN} = (1; n-1; -1); \overrightarrow{PM} = (m; 0; -p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{NM} = m+n \\ \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{PM} = m+p \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$. Vì D $\in$ (P) nên: $\frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$.

$$D \text{ là trực tâm của } \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DP} \perp \overrightarrow{NM} \\ \overrightarrow{DN} \perp \overrightarrow{PM} \\ D \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{NM} = 0 \\ \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \\ D \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ m+p=0 \\ \frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=p=3 \end{cases}$$

Kết luận, phương trình của mặt phẳng (P): $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu VII.b: PT $\Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 \quad (1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 \quad (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$.

• Khi $\sin(2^x + y - 1) = 1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 0$ (VN)

• Khi $\sin(2^x + y - 1) = -1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (1) $\Rightarrow \sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm: $\left(1; -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 34

Câu I: 2) PT $\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = -\log_2 m$. Dựa vào đồ thị ta suy ra được:

• $\log_2 m < -1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$: PT có 2 nghiệm phân biệt

- $\log_2 m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$: PT có 3 nghiệm
- $-1 < \log_2 m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$: PT có 4 nghiệm phân biệt
- $\log_2 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$: PT có 2 nghiệm
- $\log_2 m > 0 \Leftrightarrow m > 1$: PT vô nghiệm

Câu II: 1) Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$

- $x = 1$ là nghiệm
- $x \geq 2$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$ vô nghiệm
- $x \leq \frac{1}{2}$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1-2x}$ có nghiệm $x \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ BPT có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$

2) PT $\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Câu III: Xét: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$. Ta chứng minh được $I_1 = I_2$

Tính $I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2} \tan(x - \frac{\pi}{4}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$\Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow I = 7I_1 - 5I_2 = 1$

Câu IV: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm ΔSAC
 ΔSIJ đều cạnh a nên G cũng là trọng tâm ΔSIJ

IG cắt SJ tại K là trung điểm của SJ; M, N là trung điểm của SC, SD

$$IK = \frac{\sqrt{3}a}{2}; S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN)IK = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$$

$$SK \perp (ABMN); SK = \frac{a}{2}. V = \frac{1}{3} S_{ABMN} \cdot SK = \frac{\sqrt{3}a^3}{16}.$$

Câu V: Áp dụng BĐT Bunhiacopski và giả thiết ta có:

$$F \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} - cd = \sqrt{2d^2 + 6d + 9} - d^2 - 3d = f(d)$$

$$\text{Ta có } f'(d) = (2d + 3) \frac{1 - \sqrt{2(d + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}}$$

$$\text{Dựa vào BBT (chú ý: } \frac{1 - \sqrt{2(d + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}} < 0), \text{ ta suy ra được: } f(d) \leq f(-\frac{3}{2}) = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = \frac{1}{\sqrt{2}}; b = -\frac{1}{\sqrt{2}}; c = \frac{3}{2}; d = -\frac{3}{2}.$$

Câu VI.a: 1) $y + 7 = 0$; $4x + 3y + 27 = 0$.

2) Đường thẳng Δ cần tìm cắt d_2 tại $A(-1-2t; t; 1+t) \Rightarrow \overline{OA} = (-1-2t; t; 1+t)$

$$\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1 u_1} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(1; -1; 0) \Rightarrow \text{PTTS của } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu VII.a: Số cách chọn 4 bi từ số bi trong hộp là: C_{18}^4

Số cách chọn 4 bi đủ 3 màu từ số bi trong hộp là: $C_5^2 C_6^1 C_7^1 + C_5^1 C_6^2 C_7^1 + C_5^1 C_6^1 C_7^2$

Số cách chọn thỏa mãn YCBT là: $C_{18}^4 - (C_5^2 C_6^1 C_7^1 + C_5^1 C_6^2 C_7^1 + C_5^1 C_6^1 C_7^2) = 1485$

Câu VI.b: 1) (AC): $x + 2y - 7 = 0$; (AB): $x - y + 2 = 0$; (BC): $x - 4y - 1 = 0$.

2) Giao điểm của đường thẳng AB và (P) là: $C(2; 0; -1)$

Đường thẳng d đi qua C và có VTCP là $[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] \Rightarrow d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$

Câu VII.b: Xét khai triển: $(1+x)^{2n}$, thay $x = 1$; $x = -1$ và kết hợp giả thiết ta được $n = 12$

Khai triển: $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^{24-3k}$ có hệ số x^3 là: $C_{12}^7 2^7 = 101376$

Hướng dẫn giải ĐỀ SỐ 35

Câu I: 2) ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến song song với một trong hai đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

$$\text{Nghĩa là: } f'(x_0) = \pm 1 \Rightarrow \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1: y - 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x \text{ (loại); } \Delta_2: y - 0 = -1(x + 2) \Leftrightarrow y = -x - 2 \text{ (nhận)}$$

Câu II: 1) Điều kiện: $\sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Ta có: } 2 \cot 2x = 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2 \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \cot x - \tan x.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sqrt{3 + \cot x} = 3 - \cot x \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x \leq 3 \\ \cot^2 x - 7 \cot x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow [(x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} + (\sqrt{3x+1})^2] + [(\sqrt{x+2})^2 - 2\sqrt{2x^2+5x+2} + (\sqrt{2x+1})^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x+1) - \sqrt{3x+1}]^2 + [(\sqrt{x+2}) - (\sqrt{2x+1})]^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = x+1 \\ \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Câu III: Đặt $u = \sin x + \cos x \Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$.

$$\text{Đặt } u = 2 \sin t \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{12}.$$

Câu IV: Gọi Q là giao điểm của NP và AD. Do $PD' = 2PD$ nên $D'N = 2DQ$

$$AD \cdot DQ = MD^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow QM \perp AM \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3} MD \cdot S_{\Delta A'AP} \quad (1). \quad S_{\Delta A'AP} = S_{\Delta DD'A'} - S_{\Delta APD} - S_{\Delta A'D'P} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Thay vào (1), ta được: } V = \frac{a^3}{12}.$$

Câu V: Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương $\frac{(a+b-c)^3}{3c}$, $\frac{c}{3}$ và $\frac{1}{3}$ ta được:

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{c}{3} + \frac{1}{3} \geq a+b-c \Rightarrow \frac{(a+b-c)^3}{3c} \geq a+b - \frac{4c}{3} - \frac{1}{3} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự: } \frac{(b+c-a)^3}{3a} \geq b+c - \frac{4a}{3} - \frac{1}{3} \quad (2), \quad \frac{(c+a-b)^3}{3b} \geq c+a - \frac{4b}{3} - \frac{1}{3} \quad (3).$$

Cộng (1), (2) và (3) ta suy ra $P \geq 1 \Rightarrow \min P = 1$ khi $a = b = c = 1$.

Câu VI.a: 1) $P_{M/(C)} = 27 > 0 \Rightarrow M$ nằm ngoài (C). (C) có tâm $I(1; -1)$ và $R = 5$.

$$\text{Mặt khác: } P_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3MB^2 \Rightarrow MB = 3 \Rightarrow BH = 3 \Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - BH^2} = 4 = d[M, (d)]$$

Ta có: phương trình đường thẳng (d): $a(x-7) + b(y-3) = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$).

$$d[M, (d)] = 4 \Leftrightarrow \frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{12}{5}b \end{cases}.$$

Vậy (d): $y-3=0$ hoặc (d): $12x-5y-69=0$.

2) $M(-1+t; t; -9+6t) \in \Delta_1$; Δ_2 qua $A(1; 3; -1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1; -2)$

$$\overline{AM} = (t-2; t-3; 6t-8) \Rightarrow [\overline{AM}; \vec{a}] = (14-8t; 14t-20; 4-t)$$

$$\text{Ta có: } d(M, \Delta_2) = d(M, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{261t^2 - 792t + 612} = |11t - 20|$$

$$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hay } t = \frac{53}{35}$$

$$\text{Vậy } M(0; 1; -3) \text{ hay } M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$$

Câu VII.a: $\Delta' = -9 = 9i^2$ do đó phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -1 + 3i$

$$\Rightarrow A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (1+9) + (1+9) = 20$$

Câu VI.b: 1) $3x + 2y - 15 = 0$; $2x + 5y - 12 = 0$.

2) Chọn $N \in d \Rightarrow N(t; 1+2t; 2+t) \Rightarrow \overline{MN} = (t-2; 2t-1; t-2)$.

$$MN \parallel (P) \Leftrightarrow \overline{MN} \cdot \vec{n}_P = 0 \text{ (do } M \notin (P)) \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow N(1; 3; 3) \Rightarrow d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Câu VII.b: Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_7 x \Leftrightarrow x = 7^t$.

$$PT \Leftrightarrow \log_2 \left(1 + 7^{\frac{t}{3}}\right) = t \Leftrightarrow 1 + 7^{\frac{t}{3}} = 2^t \Leftrightarrow 1 + 7^{\frac{t}{3}} = 8^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{3}} - 1 = 0 \quad (*).$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{3}} - 1$ nghịch biến và $f(3) = 0$ nên (*) có nghiệm $t = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 343$.